

Universidad Nacional de Trujillo
Sección de Postgrado de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Postgrado

Programa de Maestría en Ciencias Mención Matemáticas



EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO ADAPTATIVO PARA
LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON CON
COEFICIENTES DISCONTINUOS

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
MENCIÓN EN MATEMÁTICAS

Autor : BR. MARÍA ELENA COTRINA LEÓN

Asesor : DR. OBIDIO RUBIO MERCEDES

Trujillo, Perú, 2016

N⁰ de registro

Dedicatoria

Mi tesis la dedico con todo mi amor y cariño

A ti Dios que me diste la
oportunidad de vivir y de
regalarme un hijo maravilloso.

A mi hijo Luis Fabiano, esperando ser
para él un modelo que alcanzar y superar.
Gracias por estar conmigo y recuerda
que eres importante para mi. Te amo.

A mis padres Daniel y Margarita
que me dieron la vida y han estado
conmigo en todo momento. Gracias
por todo papá y mamá, por darme
una carrera para mi futuro y por
creer en mi, los quiero mucho.

María Elena Cotrina León

Agradecimiento

A mi hermana Mayda por estar conmigo en todo este tiempo donde he vivido momentos felices y tristes, gracias por ser mi amiga.

A mi asesor Obidio Rubio por confiar en mí, al profesor Luis Lara por su constante apoyo. Muchas Gracias. Agradezco el haber tenido unos profesores tan buenas personas como lo son ustedes. Nunca los olvidaré.

A todos mis amigos, muchas gracias por estar conmigo durante este tiempo, siempre los llevaré en mi corazón. Y no me puedo despedir sin antes decirles, que sin ustedes a mi lado, no lo hubiera logrado, tantas desveladas sirvieron de algo y aquí está el fruto. Les agradezco a todos ustedes el haber llegado a mi vida y el compartir momentos agradables y tristes, pero esos momentos son los que nos hacen crecer y valorar a las personas que nos rodean. Los quiero mucho.

María Elena Cotrina León

Índice general

Resumen	v
Abstract	vi
Introducción	vii
1. Marco Teórico	1
1.1. Espacios de Sobolev	1
1.1.1. Derivación de distribuciones o derivada generalizada	2
1.2. Formulación variacional de un problema de valor de contorno	5
1.3. Solución de problemas variacionales	6
1.3.1. Aplicación a problemas de segundo orden	10
2. Material y Método	13
2.1. Objeto de estudio	13
2.2. Métodos y técnicas	13
2.2.1. El Método de Galerkin	14
2.2.2. Método de los elementos finitos	17
3. Resultados y Discusión	30
3.1. Método de los elementos finitos adaptativos	30
3.2. El algoritmo adaptativo y su convergencia	32
3.2.1. Refinamiento estratégico Morin–Nochetto–Siebert (MNS)	33
3.3. Solución de la ecuación de Poisson con coeficientes discontinuos	39

3.3.1. Constrastación	47
3.3.2. Ejemplo de Aplicación	51
Conclusiones	62
Referencias Bibliográficas	63
Anexos	65
A. Programas de Método de Elemento Finito	66

Resumen

En este trabajo se ha investigado el comportamiento numérico de la solución de la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet en la frontera y coeficientes discontinuos usando el método de elemento finito adaptativo que consiste en discretizar el dominio, la variable y la ecuación, luego analizar el error en cada uno de los elementos para refinar la malla donde se obtenga el mayor error con el propósito de encontrar la mejor solución aproximada de la ecuación de Poisson con coeficiente discontinuo. El modelo discreto de la geometría del dominio ha sido obtenido con un generador de mallas de elementos finitos, cuyo código se ha hecho en Matlab. Al ejecutar el programa de elementos finitos que implementa la ecuación de Poisson con coeficientes discontinuos sobre una malla adaptativa nos damos cuenta que la discontinuidad de $a(x)$ afecta la solución en algunos elementos, es allí donde se ha refinado la malla para disminuir el error y mejorar la solución de aproximación. Debido a ello se ha realizado un análisis de error llegando a determinar que el mayor error se ha generado alrededor de las discontinuidades, llegando a la conclusión de que para una mejor aproximación debemos calcular la estimación del error a posteriori y generar un refinamiento estratégico en las zonas de discontinuidad del coeficiente $a(x)$.

Palabras claves: *Elemento finito, Refinamiento, malla adaptativa.*

Abstract

This paper has investigated the numerical behavior of the solution of the Poisson equation with Dirichlet conditions on the border and discontinuous coefficients using the method of adaptive finite element consisting of discretization the domain, the variable and the equation, then analyze the error in each of the elements to refine the mesh where the biggest mistake is obtained in order to find the best approximate solution of the poisson equation with discontinuous coefficient. The discrete model of the domain geometry has been obtained with the generator of finite element mesh, whose code has been done in Matlab. When you run the finite element program that implements the Poisson equation with discontinuous coefficients for an adaptive mesh we realize that the discontinuity of $a(x)$ affects the solution in some elements, where it has been refined mesh to reduce the error and improve the solution approach. Because it has been made an error analysis coming to determine that the biggest mistake has been generated around the discontinuities, reaching the conclusion that for a better approximation we calculate the estimate of the a posteriori error, and generate a strategic refinement in areas discontinuity coefficient $a(x)$.

Keywords: Finite element, Refinement, adaptive mesh.

Introducción

Los problemas en física e ingeniería muchas veces consisten en resolver ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de contorno y quizá también con condiciones iniciales. La conocida Ecuación de Poisson:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x)\operatorname{grad}u) &= f(x), \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

donde $a(x)$ es una función discontinua y acotada, $f(x)$ una función continua, es una de ellas.

Tradicionalmente estos problemas han sido resueltos con el método de diferencias finitas (MDF). En [9] el MDF imagina el dominio como una malla de puntos, proporcionando una aproximación discreta de la solución. Si bien éste método es muy fácil de aprender y aplicar para obtener la solución de problemas con geometrías simples, cuando la geometría es irregular o cuando presenta una especificación inusual en las condiciones de frontera, la aplicación del MDF resulta engorrosa. A diferencia del MDF, el método de elementos finitos (MEF) supone que el dominio está constituido por muchas subregiones o elementos pequeños interconectados. Puesto que estos elementos pueden ser colocados de diversas maneras, pueden ser usados para representar formas excesivamente complejas. En [10] dice se puede introducir el conocido MEF para la resolución de problemas de la membrana (ecuación de Poisson desde el punto de vista de la mecánica). El procedimiento es adecuado en la práctica, dado que las fuerzas aplicadas son a menudo continuas a trozos. En [11] se aplica el MEF en el cálculo del flujo en medios porosos (suelo) debajo de una represa y por encima de una capa impermeable. En [8] se aplica el MEF sobre un dominio de geometría

lipschitziana que representa un acuífero confinado sobre el cual se ha generado una malla de elementos finitos tipo triangular tipo adaptativa llegando a determinar las cargas hidráulicas en las zonas del acuífero del valle de Moche y a predecir el comportamiento de las aguas subterráneas a corto plazo. En [12] se tiene que: en problemas como dinámica de partículas o elastostática se presentan ecuaciones diferenciales elípticas. Consideramos de suma importancia para nuestros fines, estudiar éste tipo de ecuaciones e identificar esquemas computacionales para aproximar soluciones de forma numérica. Los métodos que se utilizan en términos generales, son: diferencias finitas, elementos finitos y volumen finito. En [13] el método de elemento finito adaptativo (MEFA) es un algoritmo para resolver una ecuación diferencial parcial, basado en la iteración, en un bucle del tipo: resolver, estimar, marcar, refinar. El MEFA es reconocido en la actualidad como una poderosa herramienta en ciencia e ingeniería. Debido a la complejidad de las geometrías y a la discontinuidad de la función $a(x)$ se ha tenido que aplicar el método de elemento finito adaptativo, que consiste en discretizar el dominio, la variable y la ecuación para luego estimar el error en cada elemento y volver a refinar en donde el error es mayor. Al momento de discretizar el dominio y generar la solución, encontramos regiones donde el error de aproximación es mayor y se necesita refinar la malla, es por ello que se ha utilizado el Método de Elemento Finito Adaptativo. Logrando determinar que el mayor error de aproximación se genera alrededor de las discontinuidades. Para una mejor aproximación a la solución se debe calcular el error a posteriori y refinar la malla solo en la región donde es necesaria.

El Autor

Capítulo 1

Marco Teórico

1.1. Espacios de Sobolev

A continuación se define el espacio de Hilbert, que será usado en la definición de problemas variacionales. Para hacer esto, tenemos que revisar un poco de distribuciones.

El Espacio $\mathcal{D}(\Omega)$: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío, y $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto.

Se define el espacio $\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$. Explícitamente, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si, y solamente si, ϕ es infinitamente diferenciable y el soporte de ϕ es K , es decir:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \phi \in C^\infty(\Omega) \text{ y } \text{supp } \phi = \overline{\{x \in \Omega / \phi(x) \neq 0\}}\}.$$

Definición 1.1 Una forma lineal y continua definida en $\mathcal{D}(\Omega)$, se llama distribución en Ω .

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto \Lambda(\phi) = \int \Lambda\phi = \langle \Lambda, \phi \rangle. \end{aligned}$$

El espacio de todas las distribuciones se representa por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Cálculo con Distribuciones

Notaciones:

Como antes, Ω denotará un conjunto abierto no vacío de \mathbb{R}^n . Sean $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{Z}^+$ entonces

- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
- $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, donde $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$
- $\beta \leq \alpha$ significa $\beta_i \leq \alpha_i$ para $1 \leq i \leq n$.

1.1.1. Derivación de distribuciones o derivada generalizada

Para $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos

$$(D^\alpha f, \varphi) := (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Definición 1.2 Sea $m \geq 0$ un entero. Entonces

$$H^m(\Omega) := \{u/u \in L^2(\Omega), \quad D^\alpha u \in L^2(\Omega) \mid |\alpha| \leq m\}$$

es llamado **Espacio de Sobolev** de orden m , donde D^α denota la derivada generalizada.

Tenemos las siguientes propiedades:

- $(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$; $(u, v)_{L^2} = \int_\Omega uv$ define un producto escalar sobre H^m con su norma correspondiente

$$\|u\|_{H^m} = \sqrt{(u, u)_{H^m}} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2}$$

- H^m dotado con esta norma es completo. Este es entonces, un espacio de Hilbert.

Definición 1.3 Sea V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. a es V -elíptica si para $\alpha > 0$

$$|a(u, u)| \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in V$$

Definición 1.4 Sea $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. a es continua, si

$$a(u, v) \leq \beta \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V, \beta > 0$$

Definición 1.5 Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^n con frontera Lipschitz Γ , se define la aplicación traza como la aplicación lineal y continua

$$\tau_0 : D(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$$

tal que por la continuidad de la aplicación, puede ser extendida a una aplicación de $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ tal que $\tau_0(v) = v|_\Gamma$ es llamado el valor de v en la frontera Γ .

Teorema 1.1 (Teorema de la traza) Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^n con frontera Lipschitz Γ . Entonces:

- Existe un único operador lineal acotado τ_0 que mapea $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$; esto es; con la propiedad que si $u \in C^1(\Omega)$, entonces $\tau_0(u) = u|_\Gamma$ en el sentido convencional;

$$\tau_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma), \|\tau_0(u)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

- El rango de τ_0 es denso en $L^2(\Gamma)$.

Prueba

Sea $\Omega = \mathbb{R}_+^n$.

Primero probaremos $\|\tau_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C(R, n) \|u\|_{1,2}$ para $u \in D(\bar{\Omega})$. En este caso $\tau_0 u = u(x', 0)$ y debemos mostrar que hay una constante c tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', 0)| dx' \leq C \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)}^2, \quad \forall u \in D(\bar{\Omega}) \quad (1)$$

para cada $x_n \in (0, 1)$ tenemos:

$$u(x', 0) = u(x', x_n) - \int_0^{x_n} u_{x_n}(x', t) dt$$

Por la desigualdad de Schwarz's

$$\left(\int_0^{x_n} |u_{x_n}(x', t)| dt \right)^2 \leq \int_0^{x_n} |u_{x_n}(x', t)|^2 dt,$$

deducimos que $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$

$$\begin{aligned} |u(x', 0)| &\leq 2|u(x', x_n)|^2 + 2 \left(\int_0^1 |u_{x_n}(x', t)| dt \right)^2 \\ &\leq 2|u(x', x_n)|^2 + 2 \int_0^1 |u_{x_n}(x', t)|^2 dt \\ &\leq 2|u(x', x_n)|^2 + 2 \int_0^1 |\nabla u(x', t)|^2 dt \end{aligned}$$

integrando ambos lados sobre \mathbb{R}^{n-1} con respecto a x' y sobre $(0, 1)$ con respecto a x_n , facilmente obtenemos (1) con $C = 2$.

Asi mismo ahora $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$. Como $D(\bar{\Omega})$ es denso en $H^1(\mathbb{R}_+^n)$, podemos seleccionar $\{u_k\} \subset D(\bar{\Omega})$ tal que $u_k \rightarrow u$ en $H^1(\mathbb{R}_+^n)$.

La linealidad de τ_0 y estimando (1) se tiene

$$\|\tau_0 u_n - \tau_0 u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \sqrt{2} \|u_n - u_k\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)}.$$

como $\{u_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $H^1(\mathbb{R}_+^n)$, se enfiere que $\{\tau_0 u_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Por lo tanto existe $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ tal que $\tau_0 u_k \rightarrow u_0$ en $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$.

El limitante elemento u_0 no depende de la secuencia de aproximaciones $\{u_k\}$. En efecto, si $\{v_k\} \subset D(\bar{\Omega})$ y $v_k \rightarrow u$ en $H^1(\mathbb{R}_+^n)$, entonces

$$\|v_k - u_k\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0$$

$$de \quad \|\tau_0 v_k - \tau_0 u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \sqrt{2} \|v_k - u_k\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)}$$

Sigue que $\tau_0 v_k \rightarrow u_0$ en $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$.

Asi, si $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ que tiene sentido para definir $\tau_0 u = u_0$.

Esto debería ser claro que τ_0 tiene las propiedades 1 y 2.

Si Ω es un dominio Lipchitziano, el teorema puede ser una vez más localizado y reducido a medio espacio. Omitimos los detalles.

1.2. Formulación variacional de un problema de valor de contorno

El objetivo es transformar un problema de valor de contorno en un problema variacional.

Para hacer fácil esta transformación, primero se considera el problema variacional y luego se muestra que este es la generalización de un problema de valor de contorno.

Teorema 1.2 Sea $f \in L^2(\Omega)$, $w \in H^1(\Omega)$, $p = w|_{\Gamma}$, $\gamma \in L^\infty(\Gamma_2)$, $q \in L^2(\Gamma_2)$, $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Asumimos que \tilde{u} soluciona el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \tilde{u} \in H(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \text{grad } \tilde{u} \text{ grad } v = \int_{\Omega} f v - \int_{\Omega} \text{grad } w \text{ grad } v + \int_{\Gamma_2} (q - \gamma(\tilde{u} + w))v \quad v \in H(\Omega) \end{array} \right.$$

y $u = \tilde{u} + w$ es suave. Entonces u soluciona el siguiente problema de valor de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = -\Delta u = f \text{ en } \Omega \\ u = p \text{ sobre } \Gamma_1 \\ \partial_n u + \gamma u = q \text{ sobre } \Gamma_2 \end{array} \right.$$

Note que $a(u, v) = \int_{\Omega} \text{grad } u \text{ grad } v + \int_{\Gamma_2} \gamma uv$.

Si tenemos

$$\begin{aligned} Lu &= - \sum_{ij} \partial_i (a_{ij} \partial_j u) + \beta u \\ &= -\text{div}(A \text{grad}(u)) + \beta u \end{aligned}$$

en lugar de $Lu = -\Delta u$, cambiamos:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A \text{grad}(u) \text{grad}(v) + \int_{\Omega} \beta uv + \int_{\Gamma_2} \gamma uv$$

y en lugar de $\partial_n u$ escribimos $A \operatorname{grad}(u) \cdot n$.

1.3. Solución de problemas variacionales

Lema 1.1 (Lax Milgram.) *Sea V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ V -elíptica, forma bilineal continua y $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal continua.*

Entonces el problema variacional

$$(P) \begin{cases} \text{Hallar } u \in V \text{ tal que} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

tiene una única solución u .

Si además a es simétrica ésta solución única \hat{u} es el único minimizador global de la forma cuadrática

$$q(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - l(u), \quad u \in V$$

Para la prueba es necesario enunciar dos teoremas:

Teorema 1.3 (Teorema de Descomposición Ortogonal) *Sea $W \neq \emptyset$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert V . Entonces para cada $x \in W$, existe $v \in W$ y $w \in W^\perp$ tal que $x = v + w$; esta descomposición es única.*

Teorema 1.4 (Teorema de Representación de Ritz) *Sea $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional lineal acotada entonces existe un único $\tilde{u} \in V$ tal que*

$$\varphi(v) = \langle \hat{u}, v \rangle, \quad \forall v \in V$$

Inicio de Prueba

Puesto que a es acotada podemos introducir el operador lineal $\mathbf{a} : V \rightarrow V'$, tal que para cada $v \in V$, $\mathbf{a}v \in V'$ se define como:

$$\mathbf{a}v(w) := a(v, w), \quad \forall w \in V.$$

Por la propiedad se cumple que:

$$\|\mathbf{a}v\|_{V'} = \|\mathbf{a}v(w)\| := \|a(v, w)\| \leq \|v\| \|w\|,$$

lo cual indica claramente que \mathbf{a} es acotado.

Luego, si $R : V' \rightarrow V$ es la aplicación de Ritz definida as :

$$\begin{aligned} R &: V' \rightarrow V \\ L &\rightarrow RL \in V, \end{aligned}$$

donde RL es el único elemento de V tal que :

$$L(v) = \langle RL, v \rangle_V, \quad \forall v \in V.$$

Es claro que R es un isomorfismo isométrico y además $\|RL\|_V = \|L\|_{V'}$.

El problema que nos interesa equivale a : *Hallar $u \in V$ tal que*

$$a'u = RL, \quad \text{en } V \tag{1.1}$$

Es claro que (1.1) puede reformularse como: Hallar $u \in V$ tal que

$$a'u = Rl$$

donde $a' := Ra : V \rightarrow V$ denota el operador lineal en V .

De este modo, la presente demostración se reduce a probar que a' es un operador biyectivo con inversa acotada. Para esto, notamos primero que a' es acotado y que $\|a'v\|_V \leq c\|u\|\|v\|$.

También por la coercividad de a , se tiene:

$$\gamma\|v\|^2 \leq a(v, v) = \mathbf{a}v(v) \leq \|\mathbf{a}v\|_{V'}\|v\|_V, \quad \forall v \in V$$

esto es:

$$\gamma\|v\|^2 \leq a(v, v) = \|\mathbf{a}v\|_{V'} = \|Ra v\|_V = \|a'v\|_V,$$

o bien

$$\gamma\|v\|^2 \leq \|a'v\|_V, \quad \forall v \in V \tag{1.2}$$

La inyectividad de a' es inmediata a partir de (1.2).

Para la sobreyectividads procedemos de la siguiente manera:

Primero probamos que $a'(V)$ es un subespacio cerrado de V , luego que $a'(V)^\perp = \{0\}$ y por último aplicamos el teorema (1.3).

Sea $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ tal que $a'(v_n) \rightarrow w \in V$ cuando $n \rightarrow \infty$ usando (1.2) se obtiene que:

$$\gamma \|v_n - v_m\|_V \leq \|a'(v_n) - a'(v_m)\|_V,$$

lo cual indica que $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en V y por lo tanto convergente a un elemento $v \in V$. En virtud de la continuidad de a' se sigue que $a'(v_n) \rightarrow a'(v)$ cuando $n \rightarrow +\infty$, y por la unicidad del límite se concluye que $w = a'(v) \in a'(V)$. Esto prueba que $a'(V)$ es cerrado.

Sea $v \in a'(V)^\perp$, entonces $\langle w, v \rangle_V = 0$, para todo $w \in a'(V)$, en particular, para $w = a'(V)^\perp = \{0\}$. En consecuencia, la sobreyectividad de a' resulta de una aplicación directa del teorema (1.3).

Veamos que $a(u, v)$ es un producto interno bien definido en V .

En efecto:

- La bilinealidad en ambos componentes se cumple por (i) y (ii).
- $a(u, u) \geq \gamma \|u\|_V^2 \geq 0$, $\forall u \in V_2$ por 2).
- $0 = a(u, v) \geq \|u\|_V^2 \geq 0$ sii $\|u\|_V^2 = 0$ sii $u = 0$

Por tanto la norma asociada a este nuevo producto interno está bien definida por $\sqrt{a(u, u)}$

Luego usando 1) y 2) se cumple:

$$\rho \|u\|_V^2 \leq a(u, v) \leq \beta \|u\|_V^2, \forall u \in V$$

lo cual indica que las normas $\|u\|_V$ y $\sqrt{a(u, u)}$ son equivalentes en V .

De estos resultados se puede afirmar que, para cualquier sucesión

$$\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset V$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u\|_V = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a(u_n, u_n)} = 0$$

En base a esta equivalencia se prueba que la completación de V en la norma $\|\cdot\|_V$ implica la completación de V en la norma $\sqrt{a(\cdot, \cdot)}$. Por tanto V es un espacio de Hilbert con el producto interno $a(u, v)$.

Veamos ahora que L es acotada con respecto a esta nueva norma.

Sabemos que,

$$|L(u)| \leq c\|u\|_V \quad \text{para algún } c \forall u \in V \quad (1.3)$$

usando la propiedad 2) existe $\rho > 0$ tal que

$$\|u\|_V^2 \leq \rho^{-1}a(u, u), \quad \forall u \in V \quad (1.4)$$

usando (1.3) y (1.4)

$$|L(u)| \leq c\|u\|_V \leq c\rho^{-\frac{1}{2}}\sqrt{a(u, u)} \quad \forall u \in V$$

es decir existe $r = c\rho^{-\frac{1}{2}} > 0$ tal que

$$|L(u)| \leq r\sqrt{a(u, u)}, \quad \forall u \in V$$

lo cual dice que L es acotada en la norma $\sqrt{a(u, u)}$.

Finalmente utilizando el teorema de la Representación de Ritz, el cual afirma la existencia de un único $\hat{u} \in V$ tal que $L(u) = a(\hat{u}, u) \quad \forall u \in V$.

Esta afirmación resuelve el problema (P).

Probemos la segunda parte del teorema, es decir probaremos que \hat{u} es el único minimizador de la forma cuadrática,

$$q(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - L(u)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} q(u+v) &= \frac{1}{2}a(u+v, u+v) - L(u+v) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{1}{2}a(v, u) + \frac{1}{2}a(u, v) + \frac{1}{2}a(v, v) - L(u) - L(v) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + a(u, v) - L(v) + \frac{1}{2}a(v, v), \end{aligned}$$

sustituyendo u por \hat{u}

$$\begin{aligned} q(\hat{u} + v) &= q(\hat{u}) + [a(\hat{u}, v) - L(v)] + \frac{1}{2}a(v, v), \quad \forall v \in V \\ &= q(\hat{u}) + \frac{1}{2}a(v, v), \quad \forall v \in V \\ &> q(\hat{u}) \quad \forall v \in V \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Así $q(\hat{u}) < q(\hat{u} + v)$, $\forall v \in V \setminus \{0\}$ lo cual implica que

$$q(\hat{u}) < \min_{v \in V} q(\hat{u} + v) = \min_{u \in V} q(u)$$

□

1.3.1. Aplicación a problemas de segundo orden

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A \operatorname{grad} u) + \beta u &= f \text{ en } \Omega \\ u &= p \text{ sobre } \Gamma_1 \\ (A \operatorname{grad} u) \cdot n + \gamma u &= q \text{ sobre } \Gamma_2 \end{cases}$$

Anteriormente hemos visto, que este problema de valor de contorno es equivalente al siguiente problema variacional (P) donde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (A \operatorname{grad} u) \operatorname{grad} v d\Omega + \int_{\Omega} \beta u v d\Omega + \int_{\Gamma_2} \gamma u v d\Gamma \quad (1.5)$$

y

$$l(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_2} q v - a(w, v) \quad (1.6)$$

u esta dada por $u = \tilde{u} + w$, $w \in H^1$, $w|_{\Gamma_1} = p$.

Para aplicar Lax Milgram, tenemos que demostrar lo siguiente:

- a, l continuos.
- a es $H(\Omega)$ elíptica.

Lema 1.2 a, l definidos en (1.5) y (1.6) respectivamente son continuos.

Prueba:

Considerar $a(u, v) = \int_{\Omega} (A \operatorname{grad} u) \operatorname{grad} v + \int_{\Omega} \beta uv + \int_{\Gamma} \gamma uv$, tomamos $|a(u, v)|$ y aplicamos la desigualdad de Cauchy Schwartz en $L^2(\Omega)$ y $L^2(\Gamma)$.

Entonces

$$|a(u, v)| \leq \|A \operatorname{grad} u\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{grad} v\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma u\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)}$$

Puesto que $\forall g \in L^\infty, p \in L^2$ se tiene

$$\|gp\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^\infty} \|p\|_{L^2}$$

entonces

$$|a(u, v)| \leq \max_{ij} \|a_{ij}\|_{L^\infty} \|\operatorname{grad} u\|_{L^2} \|\operatorname{grad} v\|_{L^2} + \|\beta\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\gamma\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \|u\|_{L^2(\Gamma_2)} \|v\|_{L^2(\Gamma_2)}$$

pero:

$$\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}, \quad \forall u \in H^1$$

$$\|\operatorname{grad} u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}, \quad \forall u \in H^1$$

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1 \text{ (Teorema de la traza)}$$

así

$$|a(u, v)| \leq \max_{ij} \|a_{ij}\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \|\beta\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \|\gamma\|_{L^\infty} C^2 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$
$$\underbrace{[\max_{i,j} \|a_{ij}\|_{L^\infty} + \|\beta\|_{L^\infty} + C^2 \|\gamma\|_{L^\infty}]}_{cte} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

llegando a

$$|a(u, v)| \leq \beta \|u\| \|v\|.$$

Por lo tanto a es continua.

De manera análoga se demuestra que l es continua.

- Ahora a es $H(\Omega)$ -elíptica.

La norma sobre $H(\Omega)$ es $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ tenemos que mostrar:

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2 \quad \forall u \in H(\Omega)$$

donde $\alpha > 0$ es constante.

$$\begin{aligned}
\alpha(u, u) &= \int_{\Omega} (A \operatorname{grad} u) \operatorname{grad} u + \int_{\Omega} \beta u^2 + \int_{\Gamma_2} \gamma u^2 \\
&\geq a \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 + \int_{\Omega} \beta u^2 + \int_{\Gamma_2} \gamma u^2 \\
&\geq a \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 + \int_{\Omega} \beta u^2, \quad \gamma \geq 0 \\
&\geq a \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 + \bar{\beta} \int_{\Omega} u^2, \quad \beta \geq \bar{\beta} > 0 \\
\alpha(u, u) &\geq \min(a, \bar{\beta}) \|u\|_{H^1}^2 = \alpha \|u\|_{H^1}^2 = \alpha \|u\|_{H^1}^2
\end{aligned}$$

entonces a es $H(\Omega)$ elíptica.

Teorema 1.5 Sean L_1, L_2 y L_3 aplicaciones lineales definidas sobre un triángulo e de vértice $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ y (x_3, y_3) tal que:

$$L_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, 3$$

entonces:

$$\int \int_{\Omega^e} L_1^a L_2^b L_3^c dx dy = \frac{1 a! b! c!}{(a + b + c + 2)} \operatorname{area}(e)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{Z}_0^+$

Prueba: La prueba lo pueden encontrar en [4]

Capítulo 2

Material y Método

2.1. Objeto de estudio

El objeto de estudio es el problema de contorno de Poisson con condiciones de contorno homogéneas nulas en la frontera y coeficiente $a(x)$ discontinuo dado por

$$- \operatorname{div}(a(x)\operatorname{grad} u) + \beta u = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial \Omega \quad (2.2)$$

donde $a(x)$ y f funciones en $L^2(\Omega)$.

2.2. Métodos y técnicas

Para estudiar el problema de contorno de Poisson (2.1)-(2.2) se ha considerado el método de los elementos finitos tipo adaptativo para generar una malla allí donde se presenta la discontinuidad de la función $a(x)$.

2.2.1. El Método de Galerkin

Procedimiento General

En aplicaciones concretas, es importante calcular soluciones aproximadas con un grado de precisión donde el principal obstáculo es la dimension infinita del espacio V . Muchas veces, sin embargo, V puede ser escrito como la unión de subespacios finito dimensionales, así que, en principio, esto puede ser razonable para obtener soluciones aproximadas por la ecuación de proyección

$$a(u, v) = l(v)$$

sobre los espacios V_N .

En principio, cuanto mayor sea la dimension del subespacio, mejor debería ser el grado de aproximación. La idea es construir una sucesión de subespacios $\{V_N\}$ de V con las siguientes propiedades:

1. Cada V_N es finito dimensional: $\dim V_N = N$
2. $V_N \subset V_{N+1}$
3. $\overline{\bigcup V_N} = V$

El método de Galerkin proporciona una forma sistemática de obtener aproximaciones finito dimensionales convergente de problemas variacionales. Para ello consideremos una familia $\{V_N\}$ de subespacios de dimension finita de V . Supongamos que para todo $v \in V$ existe una sucesión $v_N \in V_N$ tal que:

$$v_N \rightarrow v \text{ en } V, \text{ cuando } N \rightarrow \infty$$

Ahora suponemos que la forma bilineal $a(.,.)$ no necesariamente es simétrica pero satisface las condiciones del Lema de Lax-Milgram. Entoces consideramos el siguiente problema

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_N \in V_N \text{ tal que:} \\ a(u_N, v) = l(v) \forall v \in V_N \end{cases} \quad (2.3)$$

para el procedimiento de encontrar la **aproximación de Galerkin** \hat{u}_N . Si $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ es una base para V_N y si $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ es un conjunto único de coeficientes tal que

$$\hat{u}_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x) \quad (2.4)$$

Sustituyendo (2.4) en (2.3)

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i a(\varphi_i, v) = l(v) \quad \forall v \in V_N \quad (2.5)$$

Entonces tenemos el problema de aproximación en \mathbb{R} :

$$(\mathbf{PA}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R} \text{ tal que} \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i a(\varphi_i, v) = l(v), \quad \forall v \in V_N \end{array} \right. \quad (2.6)$$

En el método de Galerkin se elige como función peso $v = \varphi_j = \frac{d\hat{u}_N}{d\alpha_j}$, luego en (2.6)

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

De este modo tenemos el problema en \mathbb{R}^N

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R} \text{ tal que} \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \quad (2.8)$$

donde $b_j = l(\varphi_j)$, $\mathbf{K} = (k_{ij})_{N \times N}$, $k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ $i, j = 1, 2, \dots, N$

Esto se puede escribir como

$$\mathbf{K}\alpha = \mathbf{B} \quad (2.9)$$

El hecho que la forma bilineal a es definida positiva y coerciva, garantiza la unicidad de la solución de (2.9). En efecto,

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho \|v\|^2 \leq a(v, v) &= \alpha_i \alpha_j a(\varphi_i, \varphi_j) \\ &= \alpha_i \alpha_j k_{ij} = \alpha^T \mathbf{K} \alpha \end{aligned}$$

entonces \mathbf{K} es definida positiva y por lo tanto invertible. Por lo tanto el sistema (2.9) tiene solución única.

La solución por el Método de Galerkin es idéntica a la solución dada por el método de Ritz cuando $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica. Note que si $a(\cdot, \cdot)$ no es simétrica, entonces \mathbf{K} es no simétrica. Este hecho hace que la solución numérica de (2.9) sea más costoso con respecto al tiempo computacional y almacenamiento que en el caso simétrico.

Ahora deseamos mostrar que $u_N \rightarrow u$ cuando $N \rightarrow \infty$, es decir, la convergencia del método, y dar un control al error de aproximación. Para este propósito, probaremos el siguiente Lema, el cual muestra la importancia de la continuidad y coercividad (existen constantes M y α , respectivamente) de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$. Para ello suponemos que se cumplen las hipótesis del Lema de Lax-Milgram en el espacio de Hilbert V .

Lema 2.1 (Lema de Céa)

Si u es la solución del problema variacional

$$\mathbf{PV} \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in V \text{ tal que:} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in V \end{array} \right.$$

y u_N es la solución del problema aproximado

$$\mathbf{PA} \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_N \in V_N \text{ tal que:} \\ a(u_N, v) = l(v), \forall v \in V \end{array} \right.$$

entonces

$$\|u - u_N\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_N} \|u - v\|$$

Prueba:

Tenemos que

$$a(u_N, v) = l(v), \quad \forall v \in V_N \tag{2.10}$$

y

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V_N \subset V \tag{2.11}$$

Restando (2.10) y (2.11) tenemos:

$$a(u - u_N, v) = 0 \quad v \in V_N \tag{2.12}$$

En particular desde que $v \in V_N$ y $u_N \in V_N$ definimos $w = v - u_N$, $w \in V_N$. Así tenemos que

$$a(u - u_N, w) = a(u - u_N, v - u_N) = 0 \quad (2.13)$$

Entonces para $v \in V_N$ tenemos

$$\begin{aligned} a(u - u_N, u - u_N) &= a(u - u_N, u - u_N + v - v) \\ &= a(u - u_N, (u - v) + (v - u_N)) \\ &= a(u - u_N, u - v) + \underbrace{a(u - u_N, v - u_N)} \\ &= a(u - u_N, u - v) \end{aligned}$$

Por la coercividad de a se tiene

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_N\|^2 &\leq a(u - u_N, u - u_N) \\ &= a(u - u_N, u - v) \\ &\leq M \|u - u_N\| \|u - v\| \end{aligned}$$

De donde se tiene:

$$\|u - u_N\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v\| \quad \forall v \in V_N \quad (2.14)$$

Por lo tanto (2.14) se cumple aún si tomamos el *ínfimo* en el lado derecho sobre todo los V_N , es decir,

$$\|u - u_N\| \leq \inf_{v \in V_N} \frac{M}{\alpha} \|u - v\|$$

□.

2.2.2. Método de los elementos finitos

El método de elementos finitos es un método numérico que divide el dominio en los llamados elementos y aproxima a la función incognita.

Presentamos los pasos básicos del método de los elementos finitos. Por simplicidad, tomamos elementos triangulares lineales con tres nodos y un grado de libertad por nodo, estos son los llamados elementos finitos lineales bidimensionales.

Discretización del dominio

Consiste en dividir el área del dominio Ω en un número finito de elementos bidimensionales, es decir elementos triangulares. Un requerimiento básico de la discretización es que no debe haber aberturas entre elementos. Además, los elementos deben ser conectados vía sus vértices, o en otras palabras, un vértice de un elemento puede ser sólo el vértice de elementos próximos, este no puede estar en el lado de otro elemento. En suma a estos requerimientos básicos, una buena discretización debe dirigirse al siguiente punto: Evitar la generación de elementos estrechos o elementos que tienen un ángulo interior pequeño. Aunque estos elementos son admisibles, ellos pueden, sin embargo, aumentar el error de la solución. Para identificar cada elemento, podemos denotarlos con un tipo de enteros, y similarmente, para identificar cada uno de los nodos de todo el dominio. Cada elemento posee tres vertices, que llamamos nodos locales, y al conjunto de todos los vertices se llaman nodos globales. Para relacionar los tres números: el número del nodo global, el número del nodo local y número de elemento, introducimos la matriz $3 \times M$, denotada por $n(i, e)$ donde $i = 1, 2, 3$ y $e = 1, \dots, M$, donde M es el número total de elementos. En $n(i, e)$, el cual es llamado también la conectividad del arreglo (matriz), i es el número del nodo local, e es el número que identifica al elemento, y el valor de $n(i, e)$ es el número del nodo global. Obviamente, esta matriz (arreglo) entera incluye toda información concerniente a la numeración de elementos y nodos. Para ilustrar esto mas claramente, se considera el ejemplo mostrado en la Figura (2.1).

En este ejemplo tenemos 4 elementos y seis nodos globales. El arreglo $n(i, e)$ puede ser numerado como:

e	$n(1, e)$	$n(2, e)$	$n(3, e)$
1	2	4	1
2	5	4	2
3	3	5	2
4	5	6	4

(2.15)

Obviamente, esta numeración no es única. Por ejemplo, también podemos nu-

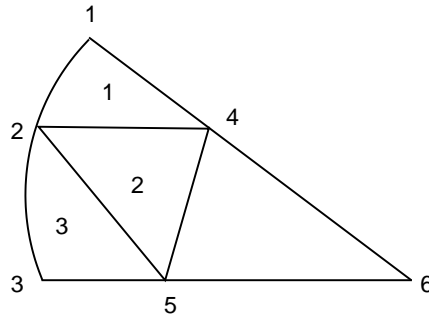


Figura 2.1: Discretización de un dominio bidimensional

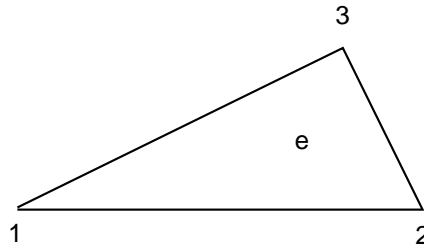


Figura 2.2: Elemento triangular lineal

merar los tres nodos globales para el primer elemento como 4, 1, 2 ó 1, 2, 4 en tanto que ellos están numerados en sentido antihorario pero la numeración de (2.15) es compatible con la numeración local mostrada en la Figura (2.2). Con relación a la conectividad del arreglo definido anteriormente, podemos introducir un arreglo similar el cual relaciona el segmento que coincide con Γ_2 con los nodos asociados para ser usados con facilidad en la incorporación de la condición de contorno de Neumann. Además, para la imposición de la condición de contorno de Dirichlet, necesitaremos un vector que almacene el número global de los nodos que residen sobre Γ_1 . Todos estos serán definidos específicamente.

Ademas de los datos descritos anteriormente, algunos otros datos son también necesarios en la formulación del elemento finito.

1. x_1 y y_i ($i = 1, \dots, N$), el cual provee las coordenadas de los nodos, donde N denota el número total de nodos.

2. El valor de $\alpha_x, \alpha_y, \beta$ y f para cada elemento.
3. El valor de p para los nodos sobre Γ_1 .
4. Los valores de γ y q para cada segmento que coinciden con Γ_2 .

Discretización de la variable

Una vez discretizado el dominio, necesitamos aproximar la función desconocida ϕ dentro de cada elemento, este es el segundo paso del análisis. Si son usados elementos triangulares lineales con un grado de libertad por nodo, la función desconocida ϕ dentro de cada elemento, es aproximada como:

$$\phi^e(x, y) = a^e + b^e x + c^e y \quad (2.16)$$

donde a^e, b^e y c^e son coeficientes constantes que serán determinados y e es el número de elemento. Para un elemento triangular lineal, hay tres nodos localizados en los vértices de los triángulos.

Asumimos que los nodos son numerados en sentido antihorario por numerales 1, 2 y 3 con los correspondientes valores de ϕ denotados por ϕ_1^e, ϕ_2^e y ϕ_3^e respectivamente. Evaluando (2.16) en los 3 nodos, obtenemos:

$$\phi_1^e = a^e + b^e x_1^e + c^e y_1^e \quad (2.17)$$

$$\phi_2^e = a^e + b^e x_2^e + c^e y_2^e \quad (2.18)$$

$$\phi_3^e = a^e + b^e x_3^e + c^e y_3^e \quad (2.19)$$

(2.19)-(2.18)

$$\phi_3^e - \phi_2^e = b^e(x_3^e - x_2^e) + c^e(y_3^e - y_2^e) \quad (2.20)$$

(2.17)-(2.19)

$$\phi_1^e - \phi_3^e = b^e(x_1^e - x_3^e) + c^e(y_1^e - y_3^e) \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} (\phi_3^e - \phi_2^e)(x_1^e - x_3^e) = b^e(x_3^e - x_2^e)(x_1^e - x_3^e) + c^e(y_3^e - y_2^e)(x_1^e - x_3^e) \\ -(\phi_1^e - \phi_3^e)(x_3^e - x_2^e) = -b^e(x_1^e - x_3^e)(x_3^e - x_2^e) - c^e(y_1^e - y_3^e)(x_3^e - x_2^e) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(\phi_3^e - \phi_2^e)(x_1^e - x_3^e) - (\phi_1^e - \phi_3^e)(x_3^e - x_2^e) &= c^e[(y_3^e - y_2^e)(x_1^e - x_3^e) - (y_1^e - y_3^e)(x_3^e - x_2^e)] \\
\Rightarrow c^e &= \frac{(\phi_3^e - \phi_2^e)(x_1^e - x_3^e) - (\phi_1^e - \phi_3^e)(x_3^e - x_2^e)}{(y_3^e - y_2^e)(x_1^e - x_3^e) - (y_1^e - y_3^e)(x_3^e - x_2^e)}
\end{aligned}$$

De (2.20)

$$b^e = \frac{\phi_3^e - \phi_2^e - c^e(y_3^e - y_2^e)}{x_3^e - x_2^e}$$

reemplazando el valor de c^e obtenemos:

$$b^e = \frac{(\phi_1^e - \phi_3^e)(y_3^e - y_2^e) - (\phi_3^e - \phi_2^e)(y_1^e - y_3^e)}{(y_3^e - y_2^e)(x_1^e - x_3^e) - (y_1^e - y_3^e)(x_3^e - x_2^e)}$$

De (2.17)

$$\begin{aligned}
a^e &= \phi_1^e - b^e x_1^e - c^e y_1^e \\
a^e &= \phi_1^e - x_1^e \left[\frac{(\phi_1^e - \phi_3^e)(y_3^e - y_2^e) - (\phi_3^e - \phi_2^e)(y_1^e - y_3^e)}{(y_3^e - y_2^e)(x_1^e - x_3^e) - (y_1^e - y_3^e)(x_3^e - x_2^e)} \right] \\
&\quad - y_1^e \left[\frac{(\phi_3^e - \phi_2^e)(x_1^e - x_3^e) - (\phi_1^e - \phi_3^e)(x_3^e - x_2^e)}{(y_3^e - y_2^e)(x_1^e - x_3^e) - (y_1^e - y_3^e)(x_3^e - x_2^e)} \right]
\end{aligned}$$

reemplazando a^e, b^e y c^e en (2.16)

$$\begin{aligned}
\phi^e(x, y) &= \phi_1^e - x_1^e \left[\frac{(\phi_1^e - \phi_3^e)(y_3^e - y_2^e) - (\phi_3^e - \phi_2^e)(y_1^e - y_3^e)}{(y_3^e - y_2^e)(x_1^e - x_3^e) - (y_1^e - y_3^e)(x_3^e - x_2^e)} \right] \\
&\quad - y_1^e \left[\frac{(\phi_3^e - \phi_2^e)(x_1^e - x_3^e) - (\phi_1^e - \phi_3^e)(x_3^e - x_2^e)}{(y_3^e - y_2^e)(x_1^e - x_3^e) - (y_1^e - y_3^e)(x_3^e - x_2^e)} \right] \\
&\quad + \left[\frac{(\phi_1^e - \phi_3^e)(y_3^e - y_2^e) - (\phi_3^e - \phi_2^e)(y_1^e - y_3^e)}{(y_3^e - y_2^e)(x_1^e - x_3^e) - (y_1^e - y_3^e)(x_3^e - x_2^e)} \right] x \\
&\quad + \left[\frac{(\phi_3^e - \phi_2^e)(x_1^e - x_3^e) - (\phi_1^e - \phi_3^e)(x_3^e - x_2^e)}{(y_3^e - y_2^e)(x_1^e - x_3^e) - (y_1^e - y_3^e)(x_3^e - x_2^e)} \right] y
\end{aligned}$$

Agrupando obtenemos:

$$\begin{aligned}
\phi^e(x, y) &= \phi_1^e \left[\frac{x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e + x(y_2^e - y_3^e) + y(x_3^e - x_2^e)}{(x_3^e - x_2^e)(y_1^e - y_3^e) - (x_1^e - x_3^e)(y_3^e - y_2^e)} \right] \\
&\quad + \phi_2^e \left[\frac{x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e + x(y_3^e - y_1^e) + y(x_1^e - x_3^e)}{(x_3^e - x_2^e)(y_1^e - y_3^e) - (x_1^e - x_3^e)(y_3^e - y_2^e)} \right] \\
&\quad + \phi_3^e \left[\frac{x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e + x(y_1^e - y_2^e) + y(x_2^e - x_1^e)}{(x_3^e - x_2^e)(y_1^e - y_3^e) - (x_1^e - x_3^e)(y_3^e - y_2^e)} \right]
\end{aligned}$$

que tiene la forma de

$$\phi^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x, y) \phi_j^e \quad (2.22)$$

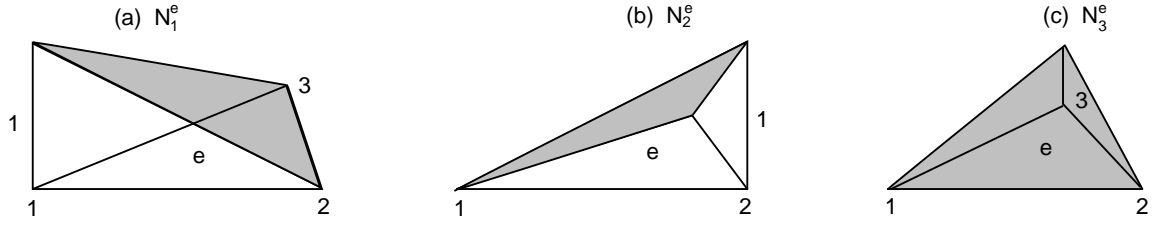


Figura 2.3: Funciones de interpolación lineal para un elemento triangular

donde $N_j^e(x, y)$ son las interpolaciones dadas por:

$$N_j^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_j^e + b_j^e x + c_j^e y) \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.23)$$

en la cual:

$$\begin{aligned} a_1^e &= x_2^e y_3^e - y_2^e x_3^e, & b_1^e &= y_2^e - y_3^e, & c_1^e &= x_3^e - x_2^e \\ a_2^e &= x_3^e y_1^e - y_3^e x_1^e, & b_2^e &= y_3^e - y_1^e, & c_2^e &= x_1^e - x_3^e \\ a_3^e &= x_1^e y_2^e - y_1^e x_2^e, & b_3^e &= y_1^e - y_2^e, & c_3^e &= x_2^e - x_1^e \end{aligned}$$

y

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [b_1^e c_2^e - c_1^e b_2^e] \quad (\text{Área del } e\text{-ésimo elemento})$$

donde x_j^e e y_j^e ($j = 1, 2, 3$) denotan los valores de las coordenadas del j -ésimo nodo en el e -ésimo elemento. Puede ser fácilmente mostrado que la función de interpolación, tiene la propiedad:

$$N_j^e(x_j^e, y_j^e) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases} \quad (2.24)$$

y como un resultado, en el nodo i , ϕ^e en (2.21) se reduce a el valor nodal ϕ_i^e ($\phi_i^e(x_i^e, y_i^e) = \phi_i^e$). Es importante resaltar que $N_j^e(x, y)$ se anulan cuando el punto de observación (x, y) esta sobre el elemento al lado opuesto del j -ésimo nodo. En la Figura (2.3) se muestra las funciones de interpolación N_j^e para un elemento triangular.

Aproximación a la ecuación diferencial

Vamos a aproximar la ecuación diferencial

$$-div(a(x)gradu) + \beta u = f, x \in \Omega$$

utilizando el método de residuos ponderados.

Definimos el residual en la forma:

$$r(x) = -div(a(x)gradu) + \beta u - f, x \in \Omega \quad (2.25)$$

y el peso residual para el elemento e es:

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e r(x) d\Omega \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.26)$$

donde N_i^e es una función base.

Se requiere que (2.26) sea mínimo dentro del elemento, así sustituyendo (2.25) en (2.26) obtenemos

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \beta \phi - f \right] dx dy \quad (2.27)$$

usando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} N_i^e \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] N_i^e + \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] N_i^e &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} N_i^e \right] + \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} N_i^e \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] N_i^e + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] N_i^e &= -\frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} N_i^e \right] + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_i^e &= \int_{\Omega^e} \int \left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} N_i^e \right] \right) dx dy + \int_{\Omega^e} \int \left(\alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} N_i^e \right] \right) dx dy \\ &+ \int_{\Omega^e} (\beta \phi - f) N_i^e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\Omega^e} \left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} - \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{\Omega^e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} N_i^e \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial y} N_i^e \right] \right) dx dy \\
&\quad + \iint_{\Omega^e} (\beta \phi - f) N_i^e
\end{aligned}$$

aplicando el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\Omega^e} \left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} - \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \beta \phi N_i^e \right) dx dy - \oint_{\Gamma^e} \left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} N_i^e \hat{x} + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} N_i^e \hat{y} \right) \hat{n}^e d\Gamma \\
&\quad - \iint_{\Omega^e} f N_i^e dx dy
\end{aligned}$$

Γ^e : contorno cerrado de Ω^e .

\hat{n}^e : vector unitario normal dirigido hacia afuera de Γ^e .

Sea $D = \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} N_i^e \hat{x} + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} N_i^e \hat{y}$

$$\begin{aligned}
R_i^e &= \iint_{\Omega^e} \left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} - \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \beta \phi N_i^e \right) dx dy - \iint_{\Omega^e} f N_i^e dx dy \\
&\quad - \oint D N_i^e \hat{n}^e d\Gamma \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Además

$$\phi^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x, y) \phi_j^e$$

Entonces

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial x} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \phi_j^e, \quad \frac{\partial \phi^e}{\partial y} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \phi_j^e$$

luego:

$$\begin{aligned}
R_i^e &= \iint_{\Omega^e} \left(\alpha_x \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \phi_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \alpha_y \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \phi_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \beta N_i^e \sum_{j=1}^3 N_j^e \phi_j^e \right) dx dy \\
&\quad - \iint_{\Omega^e} f N_i^e dx dy - \oint D N_i^e \hat{n}^e d\Gamma \\
R_i^e &= \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega^e} \left(\alpha_x \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \beta N_i^e N_j^e \phi_j^e \right) \phi_j^e dx dy
\end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega^e} \int f N_i^e dx dy - \oint DN_i^e \hat{n}^e d\Gamma \quad (2.29)$$

la cual puede ser escrita en forma matricial como:

$$\{R_i^e\} = [k^e]\{\phi^e\} - \{b^e\} - \{g^e\} \quad (2.30)$$

donde:

$$k^e = \alpha_x \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + \beta N_i^e N_j^e \phi_j^e \quad (2.31)$$

y

$$b^e = f N_i^e \quad (2.32)$$

y los elementos de $\{g^e\}$ son dadas por:

$$g_i^e = \oint_{\Gamma^e} N_i^e D \hat{n}^e d\Gamma \quad (2.33)$$

El sistema de ecuaciones (2.30) obtenido debe ser expandido, entonces ensamblando todos los elementos, tenemos:

$$[k]\{\phi\} = \{b\} - \{g\} \quad (2.34)$$

Este sistema tiene un vector columna extra $\{g\}$ y nuestra intuición nos dice que éste debe anularse o ser absorbido en $[k]$ y $\{b\}$. Para mostrar esto, en la Figura 2.1. Encontramos que el vector $\{g\}$ para este dominio es:

$$\{g\} = \left\{ \begin{array}{c} g_3^1 \\ g_1^1 + g_3^2 + g_3^3 \\ g_1^2 \\ g_2^1 + g_2^2 + g_3^4 \\ g_1^2 + g_2^3 + g_1^4 \\ g_2^4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{array} \right\} \quad (2.35)$$

usando la expresión explícita de g_i^e dada en (2.33) y sabiendo que N_i^e se anula en el lado opuesto al nodo i , obtenemos:

$$g_1 = g_3^1 = \oint_{\Gamma^1} N_3^1 D \hat{n}^1 d\Gamma$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 4}} + \int_{\text{nodo 4}}^{\text{nodo 1}} + \int_{\text{nodo 1}}^{\text{nodo 2}} \right] N_3^1 D\hat{n}^1 d\Gamma \\
&= \left[\int_{\text{nodo 1}}^{\text{nodo 4}} + \int_{\text{nodo 1}}^{\text{nodo 2}} \right] N_3^1 D\hat{n}^1 d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.36}$$

pues N_3^1 es cero en el intervalo que une el nodo 4 y el nodo 1.

$$\begin{aligned}
g_2 &= g_1^1 + g_3^2 + g_3^3 = \oint_{\Gamma^1} N_1^1 D\hat{n}^1 d\Gamma + \oint_{\Gamma^2} N_3^2 D\hat{n}^2 d\Gamma + \oint_{\Gamma^3} N_3^3 D\hat{n}^3 d\Gamma \\
&= \left[\int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 4}} + \int_{\text{nodo 4}}^{\text{nodo 1}} + \int_{\text{nodo 1}}^{\text{nodo 2}} \right] N_1^1 D\hat{n}^1 d\Gamma + \left[\int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 4}} + \int_{\text{nodo 4}}^{\text{nodo 5}} + \int_{\text{nodo 5}}^{\text{nodo 2}} \right] N_3^2 D\hat{n}^2 d\Gamma \\
&\quad + \left[\int_{\text{nodo 3}}^{\text{nodo 5}} + \int_{\text{nodo 5}}^{\text{nodo 2}} + \int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 3}} \right] N_3^3 D\hat{n}^3 d\Gamma \\
&= \left[\int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 4}} + \int_{\text{nodo 1}}^{\text{nodo 2}} \right] N_1^1 D\hat{n}^1 d\Gamma + \left[\int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 4}} + \int_{\text{nodo 5}}^{\text{nodo 2}} \right] N_3^2 D\hat{n}^2 d\Gamma \\
&\quad + \left[\int_{\text{nodo 3}}^{\text{nodo 5}} + \int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 3}} \right] N_3^3 D\hat{n}^3 d\Gamma
\end{aligned}$$

pues N_1^1 se anula en el intervalo que une el nodo 1 y el nodo 4, N_3^2 se anula en el intervalo que une el nodo 4 y el nodo 5 y N_3^3 se anula en el intervalo que une el nodo 3 y el nodo 5, además $N_1^1 = N_3^2$ y $\hat{n}^1 = -\hat{n}^2$ en el lado del elemento que conecta los nodos 2 y 4.

$N_3^2 = N_3^3$ y $\hat{n}^2 = -\hat{n}^3$ en el lado del elemento que conecta los nodos 2 y 5.

$$\begin{aligned}
g_2 &= \int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 4}} N_1^1 D\hat{n}^1 d\Gamma + \int_{\text{nodo 1}}^{\text{nodo 2}} N_1^1 D\hat{n}^1 d\Gamma + \int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 4}} N_3^2 D\hat{n}^2 d\Gamma + \int_{\text{nodo 5}}^{\text{nodo 2}} N_3^2 D\hat{n}^2 d\Gamma \\
&\quad + \int_{\text{nodo 3}}^{\text{nodo 5}} N_3^3 D\hat{n}^3 d\Gamma + \int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 3}} N_3^3 D\hat{n}^3 d\Gamma \\
&= - \int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 4}} N_1^1 D\hat{n}^2 d\Gamma + \int_{\text{nodo 1}}^{\text{nodo 2}} N_1^1 D\hat{n}^1 d\Gamma + \int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 4}} N_3^2 D\hat{n}^2 d\Gamma - \int_{\text{nodo 5}}^{\text{nodo 2}} N_3^2 D\hat{n}^3 d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\text{nodo 3}}^{\text{nodo 5}} N_3^3 D\hat{n}^3 d\Gamma + \int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 3}} N_3^3 D\hat{n}^3 d\Gamma \\
& = \int_{\text{nodo 1}}^{\text{nodo 2}} N_1^1 D\hat{n}^1 d\Gamma + \int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 3}} N_3^3 D\hat{n}^3 d\Gamma \\
& = \int_{\text{nodo 1}}^{\text{nodo 2}} N_1^1 D\hat{n} d\Gamma + \int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 3}} N_3^3 D\hat{n} d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.37}$$

similarmente obtenemos

$$g_3 = \left[\int_{\text{nodo 2}}^{\text{nodo 3}} + \int_{\text{nodo 3}}^{\text{nodo 5}} \right] N_1^3 D\hat{n} d\Gamma \tag{2.38}$$

$$g_4 = \int_{\text{nodo 4}}^{\text{nodo 1}} N_2^1 D\hat{n} d\Gamma + \int_{\text{nodo 6}}^{\text{nodo 4}} N_3^4 D\hat{n} d\Gamma \tag{2.39}$$

$$g_5 = \int_{\text{nodo 3}}^{\text{nodo 5}} N_2^3 D\hat{n} d\Gamma + \int_{\text{nodo 5}}^{\text{nodo 6}} N_1^4 D\hat{n} d\Gamma \tag{2.40}$$

$$g_3 = \left[\int_{\text{nodo 5}}^{\text{nodo 6}} + \int_{\text{nodo 6}}^{\text{nodo 4}} \right] N_2^4 D\hat{n} d\Gamma \tag{2.41}$$

Es evidente que los lados internos del elemento no contribuyen a $\{g\}$, y sólo aquellos que residen sobre el contorno Γ tienen contribuciones no triviales.

Por consiguiente, g_i será cero, si el nodo i , reside en el interior de Γ y no será cero si el nodo reside sobre el contorno Γ .

Ahora, se considera los g_i no nulos, que pueden ser escritos de manera general como:

$$g_i = \int_{\Gamma^s} N_j^e D\hat{n} d\Gamma + \int_{\Gamma^{s+1}} N_j^e D\hat{n} d\Gamma \tag{2.42}$$

donde Γ^s denota el segmento sobre el lado de la mano derecha del nodo i , Γ^{s+1} denota el segmento sobre el lado de la mano izquierda del nodo i (2.4), e y j son relativos para i , es decir $i = n(j, e)$. Aparentemente, Γ^s y Γ^{s+1} pueden ser dos lados del mismo elemento o pueden corresponder a dos elementos.

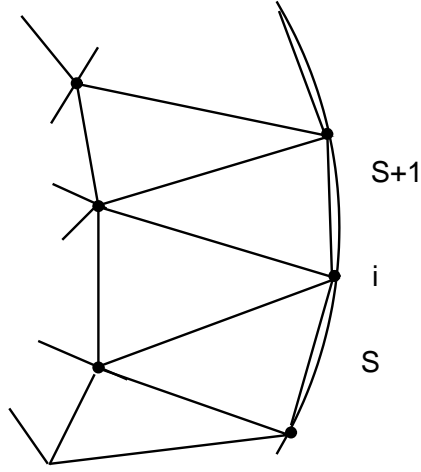


Figura 2.4: Elementos de contorno y nodos

Por otro lado, si el nodo está sobre el contorno donde se aplica la condición de contorno de Neumann homogénea, $g_i = 0$, pues el integrando $D\hat{n}$ es cero.

Finalmente, si el nodo i está residiendo dentro de Γ_2 donde se aplica la condición de contorno del tercer tipo tenemos:

$$g_i = \int_{\Gamma^s} N_j^e D\hat{n} d\Gamma + \int_{\Gamma^{s+1}} N_j^e D\hat{n} d\Gamma$$

pero $D\hat{n} + \gamma\phi = q$, entonces

$$D\hat{n} = q - \gamma\phi$$

luego

$$g_i = \int_{\Gamma^s} N_j^e (q - \gamma\phi^s) d\Gamma + \int_{\Gamma^{s+1}} N_j^e (q - \gamma\phi^{s+1}) d\Gamma \quad (2.43)$$

similar al caso unidimensional, la función ϕ desconocida dentro de cada segmento puede ser aproximada como:

$$\phi^s = \sum_{j=1}^2 N_j^s \phi_j^e$$

donde

$$N_1^s = 1 - \xi, \quad N_2^s = \xi$$

N_j^e varia linealmente desde 1, en el nodo i , a cero, en los nodos cercanos, (2.43)

tambi3n puede ser escrito como

$$g_i = \int_0^1 \xi(q - \gamma\phi^s)l^s d\xi + \int_0^1 (1 - \xi)(q - \gamma\phi^{s+1})l^{s+1} d\xi \quad (2.44)$$

donde l^s denota la longitud del segmento Γ^s y similarmente l^{s+1} denota la longitud del segmento Γ^{s+1} .

$$g_i = \int_0^1 N_2^s \left(q - \gamma \sum_{j=1}^2 N_j^s \phi_j^s \right) l^s d\xi + \int_0^1 N_1^s \left(q - \gamma \sum_{j=1}^2 N_j^{s+1} \phi_j^{s+1} \right) l^{s+1} d\xi \quad (2.45)$$

$$g_i = \int_0^1 N_2^s q l^s d\xi - \sum_{j=1}^2 \int_0^1 \gamma N_2^s N_j^s l^s d\xi + \int_0^1 N_1^{s+1} l^{s+1} q d\xi - \sum_{j=1}^2 \phi_j^{s+1} \int_0^1 N_1^{s+1} \gamma N_j^{s+1} l^{s+1} d\xi$$

$$g_i = b_2^s - \sum_{j=1}^2 \phi_j^s k_{2j}^s + b_1^{s+1} - \sum_{j=1}^2 \phi_j^{s+1} k_{1j}^{s+1} \quad (2.46)$$

donde k_{ij}^s y b_i^s son los mismos dados en (2.31) y (2.32). Expl3citamente:

$$g_6 = b_1^1 - k_{11}^1 \phi_1^1 - k_{12}^1 \phi_2^1$$

$$g_4 = b_2^1 - k_{21}^1 \phi_1^1 - k_{22}^1 \phi_2^1 + b_1^2 - k_{11}^2 \phi_1^2 - k_{12}^2 \phi_2^2$$

$$g_1 = b_2^1 - k_{21}^1 \phi_1^1 - k_{22}^2 \phi_2^2 + b_1^3 - k_{11}^3 \phi_1^3 - k_{12}^3 \phi_2^3$$

$$g_2 = b_2^3 - k_{21}^3 \phi_1^3 - k_{22}^3 \phi_2^3 + b_1^4 - k_{11}^4 \phi_1^4 - k_{12}^4 \phi_2^4$$

$$g_3 = b_2^4 - k_{21}^4 \phi_1^4 - k_{22}^4 \phi_2^4$$

Por lo visto, g_i puede ser absorbido en $[k]$ y $\{b\}$ sumando b_2^s y b_1^{s+1} a b_i , k_{2j}^s a $k_{i,ns(j,s)}$ y k_{1j}^{s+1} a $k_{i,ns(j,s+1)}$.

Capítulo 3

Resultados y Discusión

3.1. Método de los elementos finitos adaptativos

Sean G un conjunto abierto, incluido en \mathbb{R}^n , $H^1(G)$ Espacio de Sobolev (Espacio de funciones en $L^2(G)$, con primera derivada también en $L^2(G)$) y $a(x)$ constante (continua) por partes y positivo.

Así la seminorma $\|\cdot\|_G$ definida por: $\|v\|_G^2 = (a\nabla v, \nabla v)_G$ es equivalente a la norma $H_0^1(\Omega)$ cuando $G = \Omega$.

$(\cdot, \cdot)_G$: representa el producto interno en $L^2(G)$ y se escribirá $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_\Omega$.

Para algún $f \in L^2(\Omega)$, la formulación variacional del problema (2.1)-(2.2), es:

$$u \in H_0^1(\Omega) : (a\nabla u, \nabla v) = (f, v), \quad v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.1)$$

Para cada nodo x , sea W_x la union de todos los elementos K que tienen el nodo común x , y sea G_x todos los elementos $K \subset W_x$ donde los coeficientes a_k logran el máximo en W_x . La distribución de coeficientes a_k , $k \subset W_x$, será llamada cuasi-monótona con respecto a x , si se cumplen las siguientes condiciones:

Para cada elemento $K \subset W_x$ existe un conjunto Lipschitz $K_{x,qm}$ con $K \cup C_x \subset K_{x,qm} \subset W_x$ tal que $a_k \leq a_{k'}, \quad \forall k' \subset K_{x,qm}, \quad k' \in M_H$

Si x es un nodo que está en el contorno, se requiere adicionalmente que $meas_{d-1}(\partial K_{x,qm} \cap \partial\Omega) > 0$.

Los nodos en los cuales la condición cuasi-monótona no se cumple son llamados nodos singulares.

Para algún $K \in M_H$, H_K representa su diámetro.

Para algún $e \in B_H$, H_e representa su diámetro.

Ω_e : Colección de dos elementos que comparten el lado e

Para algún $K \in M_H$ y $e \in B_H$, sea:

$$W_K = \bigcup \{K' \in M_H : \bar{K}' \cap \bar{K} \neq \emptyset\}, \quad W_e = \bigcup \{K' \in M_H : \bar{K}' \cap \bar{e} \neq \emptyset\}$$

El siguiente parámetro jugará un rol importante en el análisis

$$\Lambda_k := \begin{cases} \max_{k' \in W_k} \frac{a_k}{a_{k'}}, & \text{si } k \text{ tiene un nodo singular;} \\ 1, & \text{otro lugar.} \end{cases}$$

Sea η_e el indicador del error local asociado con $e \in B_H$ definido como:

$$\eta_e^2 = \sum_{K \in \Omega_e} \Lambda_k \|H_k a_k^{-1/2} f\|_{L^2(k)}^2 + \Lambda_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2$$

donde: $\Lambda_e = \max_{k \in \Omega_e} \Lambda_k$.

Teorema 3.1 *Existe una constante $c_1 > 0$ que depende sólo del mínimo ángulo de M_H tal que:*

$$\|u - u_H\|_{\Omega}^2 \leq c_1 \sum_{e \in B_H} \eta_e^2 \quad (3.2)$$

Prueba:

Consideremos $r_H : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_0^H$ que satisfice:

$$a_k^{1/2} \|\phi - r_H \phi\|_{L^2(k)} \leq C \Lambda_k^{1/2} H_K \|\phi\|_{W_k}, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \quad \forall k \in M_H \quad (3.3)$$

$$a_e^{1/2} \|\phi - r_H \phi\|_{L^2(e)} \leq C \Lambda_e^{1/2} H_e \|\phi\|_{W_e}, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \quad \forall e \in B_H \quad (3.4)$$

Restando:

$$(a \nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad (3.5)$$

$$(a \nabla u_H, \nabla v_H) = (f, v_H) \quad (3.6)$$

$$(a \nabla (u - u_H), \nabla (v - v_H)) = (f, v - v_H) \quad (3.7)$$

□

Teorema 3.2 *Existen dos constantes $c_2, c_3 > 0$ que dependen sólo del mínimo ángulo de M_H tal que, para algún $e \in B_H$,*

$$\eta_e^2 \leq c_2 \wedge_e \sum_{k \in \Omega_e} \|u - u_H\|_k^2 + c_3 \wedge_e \sum_{k \in \Omega_e} \|H_k a_k^{-1/2} (f - f_k)\|_{L^2(k)}^2,$$

donde $f_k = \frac{1}{|k|} \int_k f dx$, $\wedge_e = \max_{k \in \Omega_e} \wedge_k$

Prueba: La prueba lo pueden encontrar en [14]

Observación 3.1 *La aparición del factor \wedge_e es algo molesto, pero sugiere fuertemente que en general no puede ser eliminado.*

Observación 3.2 *En aplicaciones prácticas podríamos encontrar un gran número de diferentes singularidades. En esta situación, podría ser difícil distinguir todos los nodos singulares en el programa en cada iteración adaptativa. Entonces la siguiente estimación ampliada de un error a posteriori podría ser útil.*

$$\eta_e^2 = \sum_{K \in \Omega_e} \bar{\wedge}_k \|H_k a_k^{-1/2} f\|_{L^2(k)}^2 + \bar{\wedge}_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2.$$

3.2. El algoritmo adaptativo y su convergencia

En esta sección mostramos la convergencia de la secuencia adaptativa, basada en la estimación del error a posteriori y el refinamiento estratégico Morin-Nochetto-Siebert. El análisis depende en gran parte de los métodos, y nos centraremos sólo en las diferencias. El principal objetivo aquí es localizar la dependencia de la tasa de reducción del error sobre la variación de los coeficientes, el cuál es crucial al examinar la eficiencia del método adaptativo.

Primero presentamos la cantidad de oscilación de datos

$$\text{OSC}(f, M_H) := \left(\sum_{k \in M_H} \|H_K a_K^{-1/2} (f - f_k)\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2}$$

donde f_K representa el principal valor de f sobre K . Para mayor referencia, mencionaremos el refinamiento estratégico MNS.

3.2.1. Refinamiento estratégico Morin–Nochetto–Siebert (MNS)

Dados dos parámetros $0 < \theta, \hat{\theta} < 1$

1. Seleccionar un subconjunto \hat{B}_H de lados en B_H tal que:

$$\left(\sum_{e \in \hat{B}_H} \eta_e^2 \right)^{1/2} \geq \theta \left(\sum_{e \in B_H} \eta_e^2 \right)^{1/2}$$

2. Sea \hat{M}_H el conjunto de elementos con un lado en \hat{B}_H . Extienda \hat{M}_H tal que:

$$\text{OSC}(f, \hat{M}_H) \geq \hat{\theta} \text{OSC}(f, M_H)$$

3. Refinar cada elemento en M_H de tal manera que un nodo es creado en el interior del elemento.

El análisis de convergencia empieza del resultado de ortogonalidad el cual puede ser fácilmente probado por la ortogonalidad de Galerkin.

Lema 3.1 *Si M_H es un refinamiento local de M_H tal que $V^H \subset V^h$, se tiene la siguiente relación:*

$$\|u - u_h\|_{\Omega}^2 = \|u - u_H\|_{\Omega}^2 - \|u_h - u_H\|_{\Omega}^2$$

□

Este lema juega un rol importante en la disminución del error en el análisis de convergencia.

Lema 3.2 *Sea M_h un refinamiento de M_H de acuerdo a la estrategia de refinamiento MNS. Entonces existen constantes $c_4, c_5 \geq 1$ que sólo dependen del mínimo ángulo de la malla M_H tal que $\forall e \in \hat{B}_H$ tenemos:*

$$\eta_e^2 \leq c_4 \wedge_e \sum_{k \in \Omega_e} \|u_h - u_H\|_k^2 + c_5 \wedge_e \sum_{k \in \Omega_e} \|H_k a_k^{-1/2} (f - f_k)\|_{L^2(k)}^2 \quad (3.8)$$

$$\wedge_e = \max_{k \in \Omega_e} \wedge_k$$

Prueba:

La presencia del factor \wedge_e en la medida del error local decrece in (3.8) esto afecta la tasa de reducción del error y por lo tanto el comportamiento global del método adaptativo.

Ahora sea $\wedge = \max_{k \in M_H} \wedge_k$, y sumando en $e \in \hat{B}_H$ en (3.8) obtenemos:

$$\sum_{e \in \hat{B}_H} \eta_e^2 \leq 2c_4 \wedge \|u_h - u_H\|_{\Omega}^2 + 2c_5 \wedge \text{OSC}(f, M_H)^2 \quad (3.9)$$

Sabemos que:

$$\left(\sum_{e \in \hat{B}_H} \eta_e^2 \right)^{1/2} \geq \theta \left(\sum_{e \in B_H} \eta_e^2 \right)^{1/2}$$

Luego

$$\sum_{e \in \hat{B}_H} \eta_e^2 \geq \theta^2 \sum_{e \in B_H} \eta_e^2$$

Así

$$\sum_{e \in B_H} \eta_e^2 \leq \theta^{-2} \sum_{e \in \hat{B}_H} \eta_e^2 \quad (3.10)$$

Por Teorema 3.2 y la ecuación (3.10):

$$\|u - u_H\|_{\Omega}^2 \leq c_1 \sum_{e \in B_H} \eta_e^2 \leq c_1 \theta^{-2} \sum_{e \in \hat{B}_H} \eta_e^2$$

Por la ecuación (3.9):

$$\|u - u_H\|_{\Omega}^2 \leq c_1 \theta^{-2} (2c_4 \wedge \|u_h - u_H\|_{\Omega}^2 + 2c_5 \wedge \text{OSC}(f, M_H)^2)$$

Luego obtenemos:

$$\|u_h - u_H\|_{\Omega}^2 \geq \frac{\theta^2}{2c_1 c_4 \wedge} \|u - u_H\|_{\Omega}^2 - \frac{c_5}{c_4} \text{OSC}(f, M_H)^2 \quad (3.11)$$

Por lema 3.1:

$$\|u_h - u_H\|_{\Omega}^2 = \|u - u_H\|_{\Omega}^2 - \|u - u_h\|_{\Omega}^2$$

Reemplazando en (3.11):

$$\|u - u_H\|_\Omega^2 - \|u - u_h\|_\Omega^2 \geq \frac{\theta^2}{2c_1c_4\Lambda} \|u - u_H\|_\Omega^2 - \frac{c_5}{c_4} \text{OSC}(f, M_H)^2$$

$$\|u - u_h\|_\Omega^2 \leq \left(1 - \frac{\theta^2}{2c_1c_4\Lambda}\right) \|u - u_H\|_\Omega^2 + \frac{c_5}{c_4} \text{OSC}(f, M_H)^2$$

Sea $\alpha = \left(1 - \frac{\theta^2}{2c_1c_4\Lambda}\right)^{1/2}$

$$\|u - u_h\|_\Omega^2 \leq \alpha^2 \|u - u_H\|_\Omega^2 + \frac{c_5}{c_4} \text{OSC}(f, M_H)^2 \quad (3.12)$$

□

Lema 3.3 *Sea $\gamma \in (0, 1)$ el factor de reducción del tamaño de elemento asociado con un paso de refinamiento. Dado $\hat{\theta} \in (0, 1)$, sea $\hat{\alpha} = (1 - (1 - \gamma^2)\hat{\theta}^2)^{1/2}$. Sea M_h un refinamiento de M_H de acuerdo a la estrategia de refinamiento MNS entonces tenemos:*

$$\text{OSC}(f, M_h) \leq \hat{\alpha} \text{OSC}(f, M_H) \quad (3.13)$$

Teorema 3.3 *Sea $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\max(\alpha, \hat{\alpha}) < \beta < 1$, y sea*

$$c_0 = \left(\|u - u_0\|_\Omega^2 + \frac{c_5}{c_4(\beta^2 - \min(\alpha, \hat{\alpha})^2)} \text{OSC}(f, M_0)^2 \right)^{1/2}$$

Entonces el algoritmo adaptativo basado en la estrategia de refinamiento MNS usando el indicador del error local a posteriori

$$\eta_e^2 = \sum_{K \in \Omega_e} \bar{\Lambda}_k \|H_k a_k^{-1/2} f\|_{L^2(k)}^2 + \bar{\Lambda}_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2$$

produce una secuencia convergente $\|u - u_k\|_\Omega \leq c_0 \beta^k$

Prueba:

Sea $a_k = \|u - u_k\|_\Omega^2$ y $b_k = \frac{c_5}{c_4} \text{OSC}(f, M_H)^2$

De (3.12): $a_{k+1} \leq \alpha^2 a_k + b_k$.

Usando repetidas veces este resultado:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &\leq \alpha^2 a_k + b_k \\
&\leq \alpha^2(\alpha^2 a_{k-1} + b_{k-1}) + b_k \\
&\leq \alpha^{2(2)} a_{k-1} + \alpha^2 b_{k-1} + b_k \\
&\leq \alpha^{2(2)}(\alpha^2 a_{k-2} + b_{k-2}) + \alpha^2 b_{k-1} + b_k \\
&\leq \alpha^{2(3)} a_{k-2} + \alpha^{2(2)} b_{k-2} + \alpha^{2(1)} b_{k-1} + b_k \\
&\quad \vdots \\
a_{k+1} &\leq a^{2(k+1)} a_{k-k} + \sum_{j=0}^k \alpha^{2j} b_{k-j}
\end{aligned}$$

De (3.13): $b_k \leq \hat{\alpha}^2 b_{k-1}$

$$\begin{aligned}
b_k &\leq \hat{\alpha}^{2(2)} b_{k-2} \\
&\leq \hat{\alpha}^{2(3)} b_{k-3} \\
b_k &\leq \hat{\alpha}^{2k} b_0
\end{aligned}$$

Entonces:

$$b_{k-j} \leq \hat{\alpha}^{2(k-j)} b_0.$$

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &\leq a^{2(k+1)} a_0 + \sum_{j=0}^k \alpha^{2j} \cdot \hat{\alpha}^{2(k-j)} b_0 \\
a_{k+1} &\leq a^{2(k+1)} a_0 + \sum_{j=0}^k \alpha^{2j} \cdot \hat{\alpha}^{2k} \cdot \hat{\alpha}^{-2j} b_0 \\
&= a^{2(k+1)} a_0 + \hat{\alpha}^{2k} b_0 \sum_{j=0}^k \left(\frac{\alpha}{\hat{\alpha}}\right)^{2j} \\
&\leq a^{2(k+1)} a_0 + \hat{\alpha}^{2k} b_0 \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{\hat{\alpha}^2}} \\
&= a^{2(k+1)} a_0 + \hat{\alpha}^{2k} b_0 \frac{\hat{\alpha}^2}{\hat{\alpha}^2 - \alpha^2} \\
&= a^{2(k+1)} a_0 + \frac{a^{2(k+1)} b_0}{\hat{\alpha}^2 - \alpha^2}
\end{aligned}$$

Sea $\max(\alpha, \hat{\alpha}) < \beta < 1$, $\rho = \min(\alpha, \hat{\alpha})$

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &\leq \beta^{2(k+1)} a_0 + \frac{\beta^{2(k+1)} b_0}{\beta^2 - \rho^2} \\
&= \beta^{2(k+1)} \left[a_0 + \frac{b_0}{\beta^2 - \rho^2} \right] \\
a_{k+1} &\leq \beta^{2(k+1)} \left[a_0 + \frac{b_0}{\beta^2 - \rho^2} \right] \\
\sqrt{a_{k+1}} &\leq \beta^{(k+1)} \left[a_0 + \frac{b_0}{\beta^2 - \rho^2} \right]^{1/2} \\
\|u - u_{k+1}\|_{\Omega} &\leq \beta^{k+1} c_0.
\end{aligned}$$

□

Observación 3.3 *La tasa de reducción β depende de dos constantes $\alpha, \hat{\alpha}$. Usualmente $\gamma \leq 1/2$; del Lema 3.3 sabemos que $\hat{\alpha} \leq 0,8$ si $\hat{\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0,6928$. Esto es bastante satisfactorio en la mayoría de problemas prácticos envolviendo singularidades fuertes.*

Observación 3.4 *La dependencia de la reducción del error β sobre el producto del límite superior y límite inferior de las constantes c_1, c_4 es poco revelado. Esto indica que la información precisa del límite superior de la constante c_1 no es importante en el proceso adaptativo basado en la estimación del error a posteriori. Es la estructura inherente de los indicadores de error a posteriori que determina la representación del algoritmo adaptativo.*

Observación 3.5 *Para el estimador del error*

$$\eta_e^2 := \sum_{K \in \Omega_e} \|H_k a_k^{-1/2} f\|_{L^2(k)}^2 + \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2$$

se tiene el siguiente resultado

$$\eta_e^2 \leq \hat{c}_4 \sum_{k \in \Omega_e} \|u_h - u_H\|_k^2 + \hat{c}_5 \sum_{k \in \Omega_e} \|H_k a_k^{-1/2} (f - f_k)\|_{L^2(k)}^2$$

donde $\hat{\eta}_e^2 = \eta_e^2$ y \hat{c}_4, \hat{c}_5 son constantes positivas que dependen sólo del mínimo ángulo de la malla M_H es similar a (3.8)

$$\eta_e^2 \leq c_4 \wedge_e \sum_{k \in \Omega_e} \|u_h - u_H\|_k^2 + c_5 \wedge_e \sum_{k \in \Omega_e} \|H_k a_k^{-1/2} (f - f_k)\|_{L^2(k)}^2$$

Si la malla M_H tiene nodos singulares

$$\|u - u_H\|_{\Omega}^2 \leq C \sum_{e \in B_H} \eta_e^2$$

llega a ser:

$$\|u - u_H\|_{\Omega}^2 \leq \hat{C}_1 \wedge \sum_{e \in B_H} \hat{\eta}_e^2$$

donde la constante \hat{C}_1 depende sólo del mínimo ángulo de la malla M_H .

Sea $\{\hat{u}_k\}_{k \geq 1}$ la sucesión generada por el algoritmo adaptativo basado en la estrategia de refinamiento MNS usando el indicador del error local a posteriori

$$\eta_e^2 = \sum_{K \in \Omega_e} \|H_k a_k^{-1/2} f\|_{L^2(K)}^2 + \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2$$

Del Teorema 3.3 esperamos que la tasa de convergencia de $\|\hat{u}_k - u\|_{\Omega}$ sea similar a $\|u_k - u\|_{\Omega}$. Esto es realmente observado de nuestros experimentos numéricos. Sin embargo, desde que nuestro estimador de error enfatiza la contribución de los estimadores de error local de nodos singulares, esto tiene ventajas resolviendo singularidades como pueden ser visto en nuestros resultados numéricos.

Observación 3.6 *La aparición de la cantidad \wedge en la definición de α indica que la tasa de reducción del error β será uno cuando cuando el salto de coeficientes es grande.*

Este hecho también es observado en el experimento numérico. Este punto interesante refleja la esencia o limitación del método adaptativo. Los métodos adaptativos bajo investigación proveen un camino eficiente para encontrar la solución discreta con control de error. Sin embargo, la naturaleza singular de los problemas originales permanecen inalterados y realmente es reflejado en la representación del algoritmo.

3.3. Solución de la ecuación de Poisson con coeficientes discontinuos

Sea el problema de valor de contorno

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x).\operatorname{grad}(u)) = f, & \text{en } \Omega = (0, 2) \times (0, 2); \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.14)$$

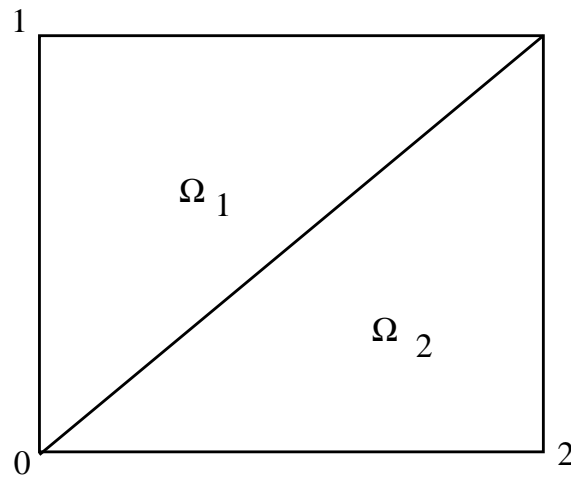


Figura 3.1: Dominio del problema de Poisson

donde

$$a(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_1 \\ R, & x \in \Omega_2. \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_1 \\ 1, & x \in \Omega_2. \end{cases}$$

1. Discretización del Dominio

Construimos la matriz de conectividad de nodos locales y globales

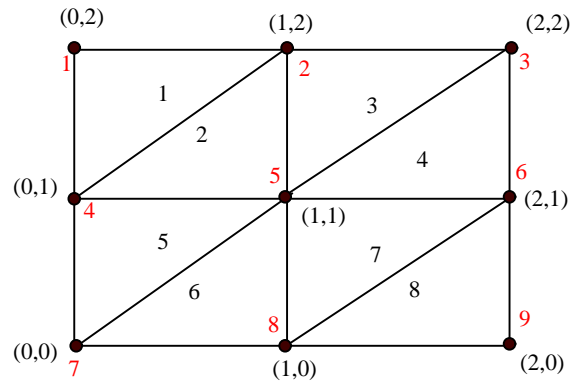


Figura 3.2: Discretización del dominio

Tabla No.1 Matriz de Conectividad de nodos

e	$\eta(1, e)$	$\eta(2, e)$	$\eta(3, e)$
1	4	2	1
2	4	5	2
3	5	3	2
4	5	6	3
5	7	5	4
6	7	8	5
7	8	6	5
8	8	9	6

Sólo hay un nodo interior (nodo 5). Luego

$$\begin{aligned}
K_{55} &= K_{22}^2 + K_{11}^3 + K_{11}^4 + K_{22}^5 + K_{33}^5 + K_{33}^7 \\
K_{22}^2 &= \frac{1}{4\Delta^2}(\alpha_x^2 b_2^2 b_2^2 + \alpha_y^2 c_2^2 c_2^2) = \frac{1}{2}(2) = 1 \\
K_{11}^3 &= \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2} \\
K_{11}^4 &= \frac{1}{2}(R) = \frac{R}{2} \\
K_{22}^5 &= \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2} \\
K_{33}^6 &= \frac{1}{2}(R) = \frac{R}{2} \\
K_{33}^7 &= \frac{1}{2}(R + R) = R \\
K_{55} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{R}{2} + R = 2 + 2R
\end{aligned}$$

$$b_5 = b_2^2 + b_1^3 + b_1^4 + b_2^5 + b_3^6 + b_3^7 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Entonces:

$$(2 + 2R)u_5^4 = \frac{1}{2} \Rightarrow u_5^H = \frac{1}{(4 + 4R)}$$

La solución aproximada en la primera malla, es: $u_H = u_5^H \psi_5^H(x)$

2. Estimación del error:

Ahora calculamos el indicador del error local η_e , considerando los elementos 5 y 6.

$$H_5 = H_6 = H_e = \sqrt{2}$$

$$\wedge_5 = 1, \quad \wedge_6 = R$$

$$\wedge_e = R$$

$$J_e = [a(x) \cdot \nabla u_H \cdot \gamma] \Big|_e$$

$$[a_e \nabla u_H \cdot \gamma] \Big|_e = (a_e \nabla u_H)_6 \cdot \gamma + (a_e \nabla u_H)_5 \cdot \gamma$$

$$u_H = u_5^H \psi_5^H(x) \Rightarrow \nabla u_H = u_5^H \nabla \psi_5^H(x)$$

Pero:

$$(\nabla u_H)_5 = (u_5^H \nabla \psi^H)_5 = u_5^H \nabla N_2^5 = u_5^H \left(\frac{1}{2\Delta^5} \begin{pmatrix} b_2^5 \\ c_2^5 \end{pmatrix} \right) = u_5^H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_5^H \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\nabla u_H)_6 = (u_5^H \nabla \psi^H)_6 = u_5^H \nabla N_3^6 = u_5^H \frac{1}{2\Delta^6} \begin{pmatrix} b_3^6 \\ c_3^6 \end{pmatrix} = u_5^H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_5^H \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$(a_e \nabla u_H)_{6\gamma} = a_6 u_5^H \nabla N_3^6 \cdot \gamma = R \begin{pmatrix} 0 \\ u_5^H \end{pmatrix} \cdot \gamma = R u_5^H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{R u_5^H}{\sqrt{2}}$$

$$(a_e \nabla u_H)_{6\gamma} = u_5^H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{u_5^H}{\sqrt{2}}.$$

Entonces

$$J_e = (R+1) \frac{u_5^H}{\sqrt{2}} = \frac{(R+1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4+4R} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \eta_e^2 &= \sum_{K \in \Omega_e} \wedge_k \|H_k a_k^{-1/2} f\|_{L^2(k)}^2 + \wedge_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2 \\ &= \wedge_{k_1} \|H_{k_1} a_{k_1}^{-1/2} f\|_{L^2(k_1)}^2 + \wedge_{k_2} \|H_{k_2} a_{k_2}^{-1/2} f\|_{L^2(k_1)}^2 + \wedge_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2 \\ &= 1 \cdot \|\sqrt{2}, 1, 0\|_{L^2(k_1)}^2 + R \|\sqrt{2}, \frac{1}{R}, 1\|_{L^2(k_2)}^2 + R \|\sqrt{2}, \frac{1}{R}, \frac{1}{\sqrt{R} 4\sqrt{2}}\|_{L^2(e)}^2 \\ &= R \cdot \int_{k_2} \frac{2}{R} dk_2 + R \cdot \int_e \sqrt{2} \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{16(2)} de \\ &= 2 \int_{k_2} dk_2 + \frac{\sqrt{2}}{16(2)} \int_e de \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{16(2)} \sqrt{2} \\ \eta_e^2 &= \frac{17}{16}. \end{aligned}$$

- Indicador del error local η_e , en los elementos 1 y 2.

$$H_1 = H_2 = H_e = \sqrt{2}, \quad \wedge_1 = \wedge_2 = \wedge_e = 1$$

$$\begin{aligned} J_e &= [a\nabla u_H \cdot \gamma] \Big|_e = (a\nabla u_H)_{1 \cdot \gamma} + (a\nabla u_H)_{2 \cdot \gamma} \\ &= (\nabla u_H)_{1 \cdot \gamma} + (\nabla u_H)_{2 \cdot \gamma} = (u_5^H \nabla N_2^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1) \\ &= u_5^H \begin{pmatrix} b_2^2 \\ c_2^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{u_5^H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{u_5^H}{\sqrt{2}} (-2) = \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4(1+R)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}(1+R)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_e^2 &= \wedge_1 \|H_1 a_1^{-1/2} f_1\|_{L^2(1)}^2 + \wedge_2 \|H_2 a_2^{-1/2} f_2\|_{L^2(2)}^2 + \wedge_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2 \\ &= 1 \cdot \|\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 0\|_{L^2(1)}^2 + 1 \cdot \|\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 0\|_{L^2(2)}^2 + 1 \cdot \|\sqrt{2}^{1/2} \cdot 1 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}(1+R)}\|_{L^2(e)}^2 \\ &= \int_e \sqrt{2} \cdot \frac{1}{8(1+R)^2} de \\ \eta_e^2 &= \frac{1}{4(1+R)^2} \end{aligned}$$

- Indicador del error local η_e , en los elementos 3 y 4.

$$H_3 = H_4 = H_e = \sqrt{2}, \quad \wedge_3 = 1, \quad \wedge_4 = R, \quad \wedge_e = R$$

$$\begin{aligned} J_e &= [a\nabla u_H \cdot \gamma] \Big|_e = (a\nabla u_H)_{3 \cdot \gamma} + (a\nabla u_H)_{4 \cdot \gamma} \\ &= (\nabla u_H)_3 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (R\nabla u_H)_4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= (u_5^H \nabla N_1^3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (Ru_5^H \nabla N_1^4) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{u_5^H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b_1^3 \\ c_1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{Ru_5^H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b_1^4 \\ c_1^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{u_5^H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{Ru_5^H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{u_5^H}{\sqrt{2}} - \frac{Ru_5^H}{\sqrt{2}} = -\frac{u_5^H}{\sqrt{2}} (1+R) \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_e^2 &= \wedge_3 \|H_3 a_3^{-1/2} f_3\|_{L^2(3)}^2 + \wedge_4 \|H_4 a_4^{-1/2} f_4\|_{L^2(4)}^2 + \wedge_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2 \\
&= 1 \cdot \|\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 0\|_{L^2(3)}^2 + R \|\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot 1\|_{L^2(4)}^2 + R \|\sqrt{2}^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \frac{-1}{4\sqrt{2}(1+R)}\|_{L^2(e)}^2 \\
&= \frac{17}{16}
\end{aligned}$$

- Indicador del error local η_e , en los elementos 7 y 8.

$$H_7 = H_8 = H_e = \sqrt{2}, \quad \wedge_7 = R, \quad \wedge_8 = 1, \quad \wedge_e = R$$

$$\begin{aligned}
J_e &= [a \nabla u_H \cdot \gamma] \Big|_e \\
&= (a \nabla u_H)_7 \cdot \gamma + (a \nabla u_H)_8 \cdot \gamma \\
&= Ru_5^H \nabla N_3^7 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + Ru_5^H \nabla N \\
&= Ru_5^H \begin{pmatrix} b_3^7 \\ c_3^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = Ru_5^H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_e^2 &= \wedge_7 \|H_7 a_7^{-1/2} f_7\|_{L^2(7)}^2 + \wedge_8 \|H_8 a_8^{-1/2} f_8\|_{L^2(8)}^2 + \wedge_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2 \\
&= R \cdot \|\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot 1\|_{L^2(7)}^2 + 1 \cdot \|\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot 1\|_{L^2(8)}^2 + R \|\sqrt{2}^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot 0\|_{L^2(e)}^2 \\
&= R \frac{2}{R} \int_7 d7 + 1 \cdot \frac{2}{R} \int_8 d8 \\
\eta_e^2 &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{2}{R} \frac{1}{R} = 1 + \frac{1}{R}
\end{aligned}$$

3. Refinamiento de la malla:

Refinamos la malla M_H en la esquina inferior derecha, porque tiene el mayor error.

Elementos de la matriz global

$$\begin{bmatrix} K_{55} & K_{59} & K_{511} \\ K_{95} & K_{99} & K_{911} \\ K_{115} & K_{119} & K_{1111} \end{bmatrix}$$

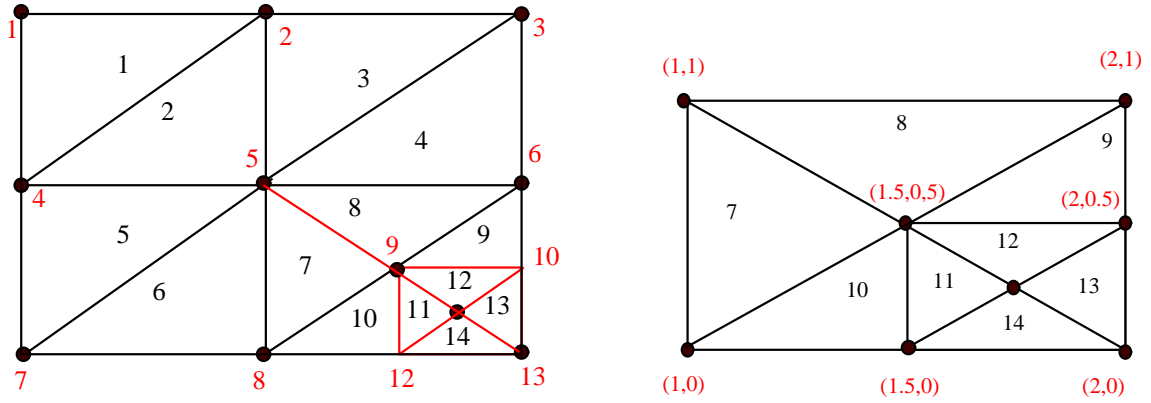


Figura 3.3: Refinamiento del dominio

$$\begin{aligned}
 K_{55} &= K_{22}^2 + K_{11}^3 + K_{11}^4 + K_{22}^5 + K_{33}^6 + K_{33}^7 + K_{33}^8 \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{R}{2} + \frac{1}{2} + \frac{R}{2} + 1 \cdot \left(\frac{R}{4} + \frac{R}{4} \right) + 1 \cdot \left(\frac{R}{4} + \frac{R}{4} \right) \\
 &= 2 + 2R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{59} &= K_{31}^8 + K_{32}^7 \\
 &= \left[R \cdot 0 + R \left(-\frac{1}{2} \right) \right] + \left[-\frac{R}{2} \right]
 \end{aligned}$$

$$K_{511} = 0$$

$$\begin{aligned}
 K_{95} &= K_{23}^7 + K_{13}^8 \\
 &= -R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{99} &= K_{22}^7 + K_{11}^8 + K_{11}^9 + K_{33}^{10} + K_{33}^{11} + K_{33}^{12} \\
 &= R + R + 2 \left(\frac{R}{4} \right) + 2 \cdot \left(\frac{R}{4} \right) + 4 \cdot \left(\frac{R}{16} + \frac{R}{16} \right) + 4 \cdot \left(\frac{2R}{16} \right) \\
 &= R + R + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \\
 K_{99} &= 4R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{911} &= K_{32}^{11} + K_{13}^{12} \\
&= 4\left(-\frac{R}{8}\right) + 4\left(-\frac{R}{16} - \frac{R}{16}\right) \\
&= -R
\end{aligned}$$

$$K_{115} = 0$$

$$\begin{aligned}
K_{119} &= K_{23}^{11} + K_{13}^{12} \\
&= -R
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{1111} &= K_{22}^{11} + K_{11}^{12} + K_{33}^{13} + K_{33}^{14} \\
&= 4R
\end{aligned}$$

$$b_5 = b_2^2 + b_1^3 + b_1^4 + b_2^5 + b_3^6 + b_3^7 + b_3^8 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
b_9 &= b_2^7 + b_1^8 + b_1^9 + b_3^{10} + b_3^{11} + b_3^{12} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{48} = \frac{7}{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{11} &= b_2^{11} + b_1^{12} + b_3^{13} + b_3^{14} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Luego el sistema de ecuaciones queda en la forma:

$$\begin{pmatrix} 2+2R & -R & 0 \\ -R & 4R & -R \\ 0 & -R & 4R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_5^H \\ u_9^H \\ u_{11}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{24} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned}(30 + 26R)u_{11}^h &= \frac{20R + 15}{12R} \\ u_{11}^h &= \frac{20R + 15}{24R(15 + 13R)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_5^h - 15u_{11}^h &= -\frac{5}{8R} \\ u_5^h &= -\frac{5}{8R} + \frac{5(20R + 15)}{8R(15 + 13R)} \\ &= \frac{35}{8(15 + 13R)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_9^h &= -\frac{1}{12R} + 4\frac{(20R + 15)}{24R(15 + 13R)} \\ &= \frac{9R + 5}{4R(15 + 13R)}\end{aligned}$$

La solución aproximada es:

$$u_H = u_5^h \psi_5^h(x) + u_9^h \psi_9^h(x) + u_{11}^h \psi_{11}^h(x)$$

3.3.1. Constrastación

Se presenta los resultados obtenidos manualmente así como también los que se obtienen al ejecutar el programa en Matlab, para una malla de 14 elementos con 13 nodos. Para el coeficiente $a(x)$ con $R = 0.01$

Resultados obtenidos manualmente

Tenemos para los nodos 5, 9 y 11:

$$\begin{aligned}u_5^h &= \frac{35}{8(15 + 13R)} = \frac{35}{8 \times (15 + 13 \times 0.01)} = \frac{875}{3026} \approx 0.2891606081 \\ u_9^h &= \frac{9R + 5}{4R(15 + 13R)} = \frac{9 \times 0.01 + 5}{4 \times 0.01(15 + 13 \times 0.01)} = \frac{12725}{1513} \approx 8.410442828 \\ u_{11}^h &= \frac{20R + 15}{24R(15 + 13R)} = \frac{20 \times 0.01 + 15}{24 \times 0.01(15 + 13 \times 0.01)} = \frac{19000}{4539} \approx 4.185944040\end{aligned}$$

Resultados obtenidos ejecutando el programa

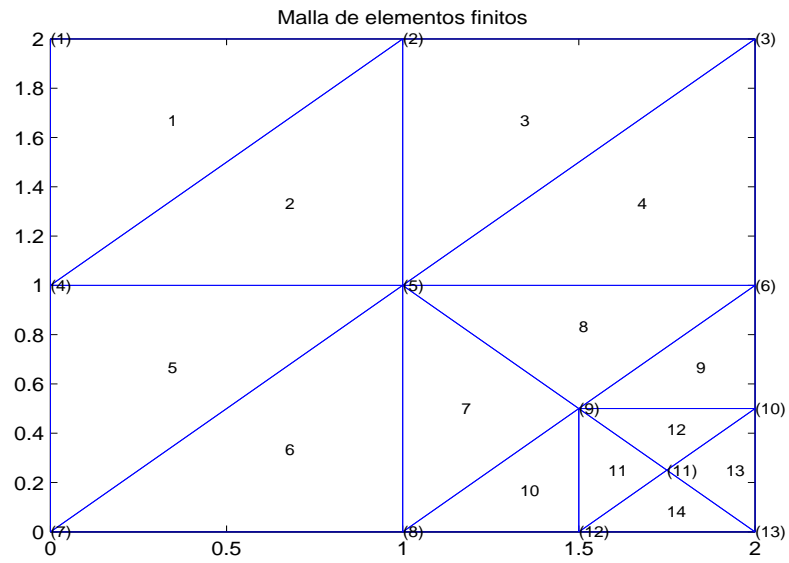


Figura 3.4: Malla de elementos finitos adaptativa, 14 elementos, 13 nodos

F =

- 0
- 0
- 0
- 0
- 0.5000
- 0
- 0
- 0
- 0.2917
- 0
- 0.0833
- 0
- 0

K =

Columns 1 through 7

1.0000	0	0	0	0	0	0
0	1.0000	0	0	0	0	0
0	0	1.0000	0	0	0	0
0	0	0	1.0000	0	0	0
0	0	0	0	2.0200	0	0
0	0	0	0	0	1.0000	0
0	0	0	0	0	0	1.0000
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.0100	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Columns 8 through 13

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	-0.0100	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
1.0000	0	0	0	0	0

```
0  0.0400      0 -0.0100      0      0
0      0      1.0000      0      0      0
0 -0.0100      0  0.0400      0      0
0      0      0      0      1.0000      0
0      0      0      0      0      1.0000
```

Procesando ...

num_iteraciones =

3

sol_aprox =

```
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.2892
0.0000
0.0000
0.0000
8.4104
0.0000
4.1859
0.0000
0.0000
```

>>

Se muestra que en ambos casos los valores obtenidos para los nodos 5, 9 y 11 son los mismos.

3.3.2. Ejemplo de Aplicación

Ahora se presenta la solución del problema de la ecuación de Poisson con coeficiente discontinuo planteado en (3.14).

Se ha generado una malla de elementos finitos tipos adaptativa utilizando un programa generador de mallas hecho en MatLab con 22 elementos y 19 nodos, la malla se muestra en la Figura (3.5).

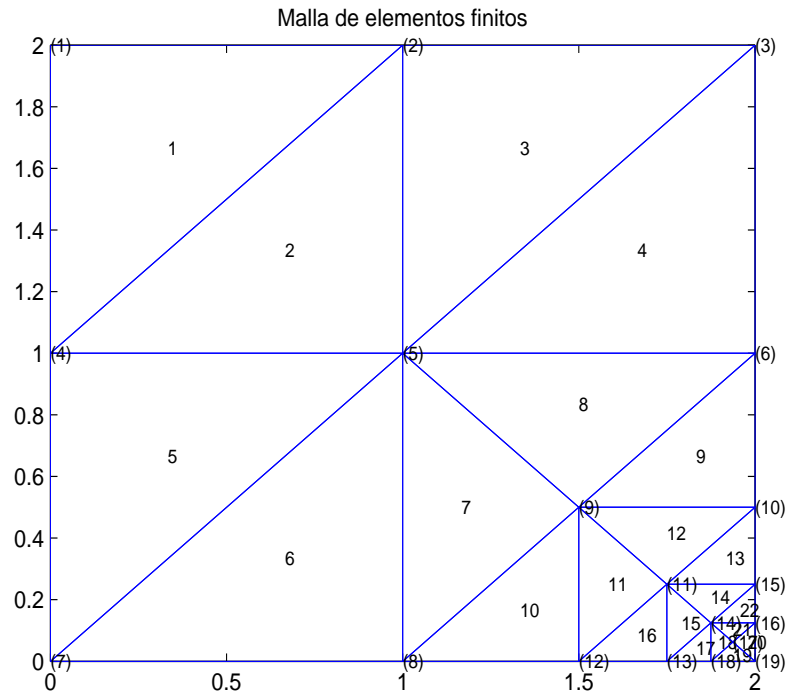


Figura 3.5: Malla de elementos finitos adaptativa, 22 elementos, 19 nodos

En seguida presentamos el programa principal que implementa el método de los elementos sobre la malla adaptativa hecho en MatLab.

```
load elementos3.m
```

```

load coord_xy.m
n = elementos3;
x = coord_xy(:,1);
y = coord_xy(:,2);
ntr = size(n,1);           % ntr : number of triangles/elements
npt = size(x,1);          % npt : number of nodes
axis off
xmin=min(x); xmax=max(x);
ymin=min(y); ymax=max(y);
axis([xmin,xmax,ymin,ymax])
for k=1:ntr                % ntr : number of elements
    for m=1:3
        ni=n(k,m);
        xx(m)=x(ni);
        yy(m)=y(ni);
    end
    xx(4)=xx(1);
    yy(4)=yy(1);
    plot(xx,yy)
    hold on
    xcen=sum( xx(1:3))/3;
    ycen=sum(yy(1:3))/3;
    text(xcen, ycen, int2str(k),'fontSize',8)
%     text(xcen, ycen,['(' ,int2str(k), ')'], 'fontSize',12)
end                        % ntr : number of elements
    for i=1:npt
        text(x(i), y(i),['(',int2str(i),')'], 'fontSize',8)
    end

```

Ingresamos la matriz de conectividad de nodos global.

Archivo elementos3.m

4, 2, 1
4, 5, 2
5, 3, 2
5, 6, 3
7, 5, 4
7, 8, 5
8, 9, 5
9, 6, 5
9, 10, 6
8, 12, 9
12, 11, 9
9, 11, 10
11, 15, 10
14, 15, 11
13, 14, 11
12, 13, 11
13, 18, 14
18, 17, 14
18, 19, 17
19, 16, 17
17, 16, 14
14, 16, 15

Archivo de coordenadas de nodos

archivo *coord_xy.m*

0 2
1 2
2 2

0 1
1 1
2 1
0 0
1 0
1.5 0.5
2 0.5
1.75 0.25
1.5 0
1.75 0
1.875 0.125
2 0.25
2 0.125
1.9375 0.0625
1.875 0
2 0

Archivo de nodos en la frontera del dominio Archivo *nodo_c.m*

1
4
7
8
12
13
18
19
16
15
10
6

3

2

Vector Fuerza

F =

0
0
0
0
0.5000
0
0
0
0.2917
0
0.0729
0
0
0.0182
0
0
0.0052
0
0

Matriz de Rigidez Global

K =

Columns 1 through 13

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	8	0	0	0	-3	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-3	0	0	0	12	0	-3	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	12	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 14 through 19

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

-3	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
12	0	0	-3	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
-3	0	0	12	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

Número de iteraciones

num_iteraciones =

5

Vector Solución

sol_aprox =

-0.0000

-0.0000

-0.0000

-0.0000

0.0811

-0.0000

-0.0000

-0.0000

0.0497

-0.0000

0.0203

-0.0000

-0.0000

0.0071
-0.0000
-0.0000
0.0022
-0.0000
-0.0000

En la Figura (3.6) se muestra la gráfica de la solución del problema de Poisson con coeficiente discontinuo dado en (3.14): para $R = 3$, se observa que en el contorno la solución vale cero y el máximo valor que toma es 0.0811 en el nodo 5, para $R = 5$, se observa que en el contorno la solución vale cero y el máximo valor que toma es 0.0548 en el nodo 5 y para $R = 10$, donde se observa que en el contorno la solución vale cero y el máximo valor que toma es 0.0302 en el nodo 5.

En la Figura (3.7) se muestra la gráfica de la solución del problema de Poisson con coeficiente discontinuo dado en (3.14): para $R = 10^{-1}$, se observa que en el contorno la solución vale cero y el máximo valor que toma es 0.9261 en el nodo 9, para $R = 10^{-2}$ se observa que en el contorno la solución vale cero y el máximo valor que toma es 8.4104 en el nodo 9 y para $R = 10^{-3}$ se observa que en el contorno la solución vale cero y el máximo valor que toma es 83.7695 en el nodo 9.

En la Tabla No. 2 se muestra los resultados para valores del coeficiente de difusión $a(x)$ de R de 1, 5 y 10 en los nodos 5, 9, 11, 14 y 17. El programa en Matlab muestra que los valores de la solución se comportan en forma regular en estos nodos. En la Tabla No. 3 se muestra los resultados para valores del coeficiente de difusión $a(x)$ de R de 10^{-1} , 10^{-2} y 10^{-3} en los nodos 5, 9, 11, 14 y 17. El programa en Matlab muestra que los valores de la solución crece demasiado en estos nodos. Esto precisamente se debe a que el coeficiente de difusión es discontinuo para valores de $R < 1$.

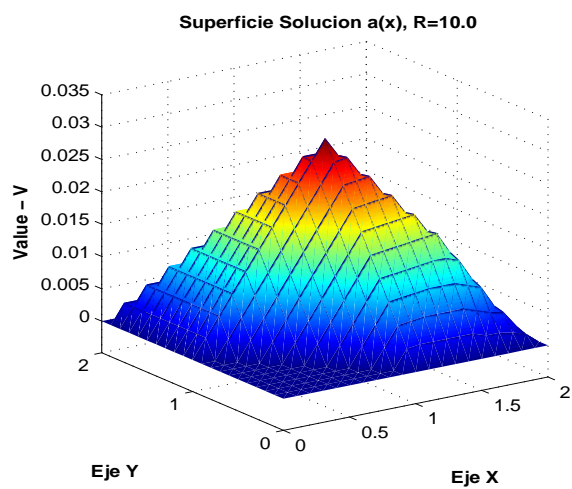
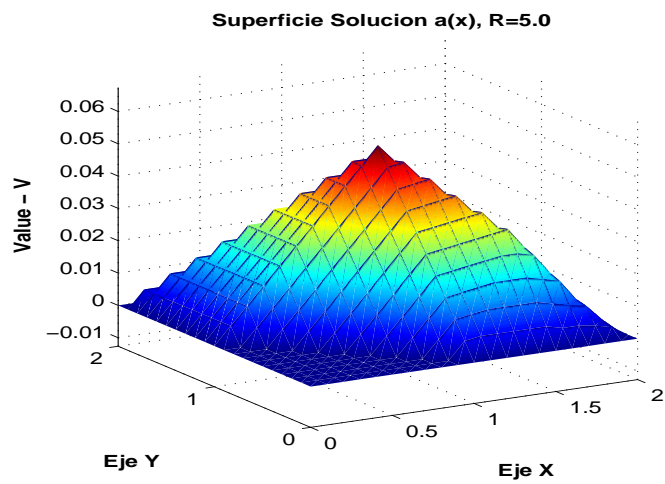
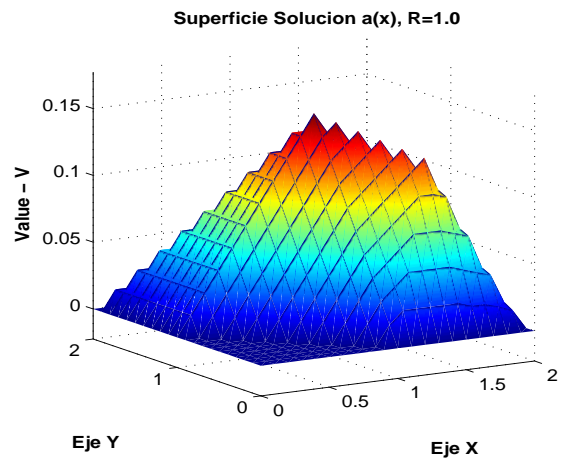


Figura 3.6: Superficie solución para el coeficiente $a(x)$ con $R \geq 1$

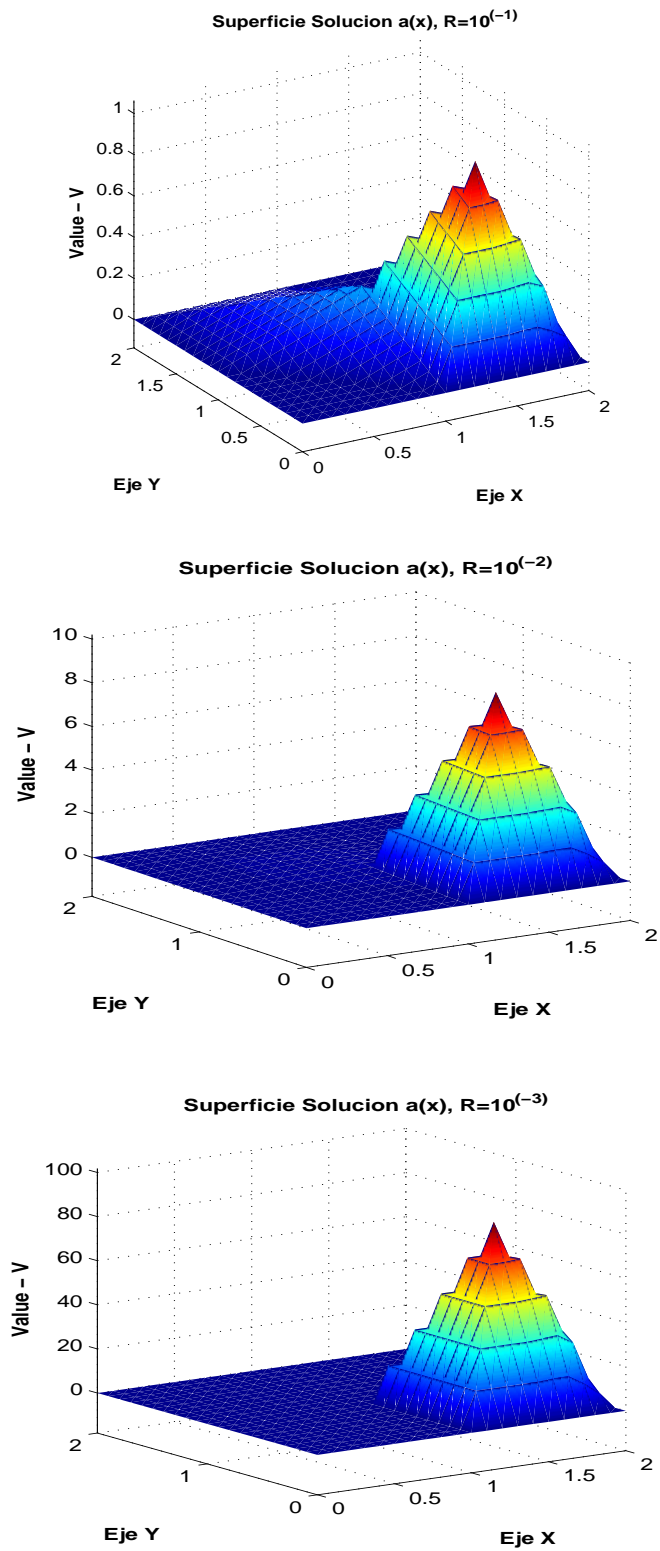


Figura 3.7: Superficie solución para el coeficiente $a(x)$ con $R < 1$

Tabla No. 2 Resultados para valores del coeficiente $a(x)$ con $R \geq 1$

Nodo	R=1.0	R=5.0	R=10.0
5	0.1549	0.0548	0.0302
9	0.1257	0.0314	0.0165
11	0.0546	0.0126	0.0065
14	0.0197	0.0044	0.0023
17	0.0075	0.0014	0.0007

Tabla No. 3 Resultados para valores del coeficiente $a(x)$ con $R < 1$

Nodo	R=0.1	R=0.01	R=0.001
5	0.2695	0.2892	0.2916
9	0.9261	8.4104	83.7695
11	0.4794	4.2776	43.2128
14	0.1588	1.1810	10.9438
17	0.0562	0.3339	2.8341

Conclusiones

Al finalizar la presente investigación se ha llegado a las siguientes conclusiones

1. Para resolver el problema de la discontinuidad de la función $a(x)$ en el problema (3.14) se ha tenido que aplicar el método de los elementos finitos para lo cual se ha generado una malla de elementos tipo adaptativa que mejora la aproximación de las discontinuidades de la función $a(x)$.
2. En la aplicación del método adaptativo se ha llegado a establecer la convergencia de la secuencia adaptativa basándose en la estimación del error a posteriori y el refinamiento estratégico.
3. Para valores de R mayores que 1 se observa que la solución del problema (3.14) es continua en todo su dominio, mientras que para valores de R entre 0 y 1 la solución presenta discontinuidades en la esquina inferior derecha.

Bibliografía

- [1] AKIN, J. E., *Finite Element Analysis for Undergraduate*, Academic Press, London, 1986.
- [2] JIANMING, JIN, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, Jhon Wiley Sons. Inc., 1993
- [3] MAC DONALD MICHAEL AND RARBAUGH ARLEN, *Modflow Packages Reference Manual*, Printing Office Washington.1988
- [4] SCHWARZ, H. R., *Finite Elements Methods*, Academics Press Limited.
- [5] NITHIARASU, P. AND ZIENKIEWICZ, O., Adaptive mesh generation for fluid mechanics problems, *Int.J. Numer. Meth. Engng.*, **19**: 629-662, 2000.
- [6] JONES, M. AND PLASSMANN, P., Adaptative refinement of unstructured finite-element meshes, *Finite Elements in Analysis and Design*, **25**: 41-60, 1997
- [7] BRENNER S. AND SCOTT L., *The Mathematical Theory of Finite Elements Methods*, Third Edition, Springer Science+Business Media, LLC, New York, USA, 2008.
- [8] LARA, L, *Método del elemento finito para un acuífero confinado*, Tesis de Doctorado, Biblioteca de Posgrado UNT., 2009.
- [9] www.academia.edu/9799291/método_de_elementos_finitos_la_ecuacion_de_poisson_unidimensional

- [10] LEONID P. LEVEDEV AND RICARDO O. GROSSI, *La Ecuación de Poisson desde el punto de vista de la mecánica*, Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.,**19,3**: 383-394, 2003.
- [11] COTRINA, M, *El Método de elementos finitos en el calculo de flujo en medios porosos*, Tesis de Pregrado, Biblioteca de Pregrado UNT., 2003.
- [12] ABEL PALAFOX GONZALEZ AND JOSÉ LUIS ALONZO VELAZQUEZ, *Métodos Numéricos para solución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas*, 2012.
- [13] J. MANUEL CASCÓN, CHRISTIAN KREUZER, KUNIBERT SIEBERT AND RICARDO NOCHETO, *Método de Elementos Finitos Adaptativo: Convergencia y Optimalidad*, Univ. de Salamanca, Univ. Augsburg, Univ. Maryland, 2009.
- [14] ZHIMING CHEN, SHIBIN DAI, *On the Efficiency of Adaptive Finite Element Methods for Elliptic Problems with discontinuous Coefficients* , SIAM J.SCI. COMPUT, Vol 24, N^o2,pp 443-462.

Anexos

Anexo A

Programas de Método de Elemento Finito

Programa fem1

```
%-----  
%      Load matriz de conectividad  
%-----  
% matriz de conectividad elementos3.m  
load elementos3.m  
n = elementos3;  
% coordenadas de los nodos xy  
load coord_xy.m  
% plot de la malla de elementos  
femaria_view_mesh  
% nodos del contorno del dominio  
load nodo_c.m  
% nodos de Dirichelt = nodos de contorno  
nodos_d = nodo_c;  
% Vector de condiciones de Dirichelt  
dim = size(nodos_d,1);
```

```

p = zeros(1,dim);
% valor de beta
beta = 0;
% Definicion de matriz de rigidez K y vector de carga B
num =size(coord_xy,1);
K = zeros(num); % matriz de rigidez
F = zeros(num,1); % vector de carga
%-----
% calculo de ae, be, ce
%-----
ntr = size(elementos3,1);
% Proceso principal del programa
x = coord_xy(:,1);
y = coord_xy(:,2);
for e = 1:ntr
    i = n(e,1);
    j = n(e,2);
    m = n(e,3);
%-----
ae(1) = x(j)*y(m) - x(m)*y(j);
ae(2) = x(m)*y(i) - x(i)*y(m);
ae(3) = x(i)*y(j) - x(j)*y(i);
%-----
be(1) = y(j)-y(m);
be(2) = y(m)-y(i);
be(3) = y(i)-y(j);
%-----
ce(1) = x(m) - x(j);
ce(2) = x(i) - x(m);

```

```

ce(3) = x(j) - x(i);
%-----
%      Calculate Deltae
%-----
deltae=(0.5)*(be(1)*ce(2)-be(2)*ce(1));
%-----
% Global nodes in the element
%-----
ii=n(e,1);
jj=n(e,2);
mm=n(e,3);
%-----
% Generate the element matrix [ke]
% ke : matrix of orden 3x3
% bbe : vector of orden 3x1
%-----
for i=1:3
    for j=1:3
%      if i ~ j
%          del_ij = 1.0;
%      else
%          del_ij = 0.0;
%      end
% Transmisividad Tx (en la direccion del Eje X)
r = 3;
alphax = [ 1 1 1 r 1 r r r r r r r r r r r r r r r r ];
% Transmisividad Ty (en la direccion del Eje Y)
alphay = alphax;
% Ensamblaje de la matriz de conectividad [K]

```

```

ke(i,j)= ( alphax(e)*be(i)*be(j) )/(4.0*deltae) +
( alphay(e)*ce(i)*ce(j) )/( 4.0*deltae );
end

% Integracion: recarga para la función recarga f constante
f = [0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
bbe(i)= (f(e)/3)*deltae;
end

%-----
%
%      Add [k^e]  to [K]
%-----

for i=1:3
    for j=1:3
        K(n(e,i),n(e,j)) = K(n(e,i),n(e,j)) + ke(i,j);
    end
    F(n(e,i))=F(n(e,i)) + bbe(i);
end

end          % fin look principal

%-----
% Imposition of the Dirichlet boundary condition to matrix [K]
%
%-----

for i=1: size(nodos_d,1)    % label 55
    F(nodos_d(i)) = p(i);
    K(nodos_d(i),nodos_d(i)) = 1.0;
    for j=1:num    %label 60
        if j~= nodos_d(i)
            F(j) = F(j) - K(j,nodos_d(i))*p(i);
        K(nodos_d(i), j) = 0.0;

```

```
        K(j,nodos_d(i))=0.0;
    end
end % label 60
end      % label 55
F
K
[num_iteraciones, sol_aprox] = solve_gradiente_conjugado(K,F)
% saved data
data = [coord_xy(:,1),coord_xy(:,2),sol_aprox];
csvwrite('data3.m',data);
csvwrite('data3',data);
```

